1 Элементарная комбинаторика

1.1 Правила суммы и произведения

Пусть S — некоторое множество. Через $P(S)$ обозначается множество всех подмножеств множества S.

Мы будем иметь дело с конечными множествами. Через $|A|$ обозначается число элементов множества A. Множество, состоящее из n элементов, называется n-*множеством.*

Семейство $\{A_1, \ldots, A_n\}$ подмножеств множества S называется *разбиением* S, если

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ и } A_i \cap A_j = \varnothing \text{ для всех } i \neq j.$$

Правило суммы. Если S — конечное множество и $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in P(S)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$|S| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|,$$

причём равенство достигается, когда семейство $\{A_1, \ldots, A_n\}$ является разбиением множества S.

Пример 1. На полке стоит десять томов Пушкина, четыре тома Лермонтова и семь томов Гоголя. Сколькими способами можно выбрать с полки одну книгу?

Решение. Пусть S — множество всех книг на полке, P — множество томов Пушкина, L — множество томов Лермонтова, G — множество томов Гоголя. По условию $S = P \cup L \cup G$ и $|P| = 10$, $|L| = 4$, $|G| = 7$. Очевидно, что $P \cap L = L \cap G = G \cap P = \varnothing$. Следовательно, по правилу суммы, получаем

$$|S| = |P| + |L| + |G| = 10 + 4 + 7 = 21. \quad \blacksquare$$

Совокупность всех упорядоченных пар (a, b) таких, что $a \in A$, $b \in B$, называется *прямым* (*декартовым*) произведением множеств A и B и обозначается $A \times B$, т. е.

$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Прямое произведение $A \times A$ обозначается A^2. Определим прямое произведение n множеств:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : \ a_1 \in A_1, \ldots a_n \in A_n\}.$$

Обозначим $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Правило произведения Для конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Мы будем пользоваться правилом произведения в следующей формулировке. *Если объект a_1 можно выбрать n_1 способами, после каждого выбора этого элемента* *следующий за ним элемент a_2 можно выбрать n_2 способами и т. д., после каждого выбора объектов a_1, a_2, …, a_{k-1} объект a_k можно выбрать n_k способами, то выбор упорядоченной совокупности объектов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ можно осуществить $n_1 n_2 \ldots n_k$ способами.*

Пример 2. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры чётные?

Решение. Пусть A_i — множество цифр, стоящих на i-й позиции, $i = 1, \ldots, 5$. Ясно, что $A_1 = \{2, 4, 6, 8\}$, $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ и $|A_1| = 4$, $|A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = 5$. Из правила произведения получаем

$$|\, A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5| = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500. \quad \blacksquare$$

1.2 Упорядоченные выборки

Упорядоченный набор

$$(a_1, a_2, \ldots, a_r) \tag{1.1}$$

элементов из множества S, не обязательно различных, называется *упорядоченной r-выборкой* из множества S. Число r называется объёмом выборки (1.1). Упорядоченные r-выборки $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ равны, если

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Упорядоченная r-выборка (1.1), допускающая повторное появление элементов называется *r-перестановкой с повторениями.*

Теорема 2.1. *Число r-перестановок с повторениями из n-множества равно n^r.*

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием из правила произведения, где $n_1 = n_2 = \ldots, = n_r = n$. $\blacksquare$

Упорядоченная r-выборка (1.1) из n-множества S, в которой все элементы различны, называется *r-перестановкой из n элементов.* В r-перестановке $r \leq n$; n-перестановка называется *перестановкой n* элементов.

Теорема 2.2. *Число r-перестановок из n-множества равно*

$$P(n, r) = n(n-1) \ldots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием из правила произведения, где $n_1 = n$, $n_2 = n - 1$, …, $n_r = n - r + 1$. $\blacksquare$

Следствие 2.3. *Число n-перестановок из n-множества равно $n!$.*

1.3 Неупорядоченные выборки

Неупорядоченный набор

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \tag{1.3}$$

элементов из множества S, не обязательно различных, называется *неупорядоченной r-выборкой.* Число r называется объёмом выборки (1.3).

Число появлений элемента в r-выборке называется *кратностью* выборки. Неупорядоченные r-выборки $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ равны, если обе выборки содержат одни и те же элементы с учётом их кратности.

Неупорядоченная r-выборка (1.3), допускающая элементы произвольной кратности, называется *r-сочетанием с повторениями.* Если каждый элемент в r-выборке (1.3) имеет кратность 1, то r-выборка является r-подмножеством множества S; r-подмножество n-множества называется *r-сочетанием* из n элементов.

Теорема 3.1. *Число r-сочетаний из n элементов равно*

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Доказательство. По теореме 2.2 число r-перестановок из n элементов равно $P(n,r)$. Каждая r-перестановка может быть упорядочена $r!$ способами. Следовательно, число r-сочетаний равно

$$\frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}. \quad \blacksquare$$

Число r-сочетаний из n элементов обозначается через C_n^r. Таким образом, по определению

$$C_n^r = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}. \tag{1.4}$$

Теорема 3.2. *Число r-сочетаний с повторениями из n-множества равно*

$$C_{n+r-1}^{n-1} = C_{n+r-1}^{r}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Представим n-множество S в виде:

$$S = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Всякое r-сочетание из множества S можно записать в виде

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\},$$

где

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_r.$$

Пусть теперь S^* есть $(n+r-1)$-множество натуральных чисел 1, 2, ..., $n+r-1$. Тогда

$$(a_1+0, a_2+1, \ldots, a_r+r-1)$$

является r-подмножеством множества S^*. Соответствие

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \longrightarrow \{a_1+0, a_2+1, \ldots, a_r+r-1\},$$

инъективное отображение. Но по теореме 3.1 число r-сочетаний из множества S^* равно C_{n+r-1}^r. $\blacksquare$

1.4 Биномиальные коэффициенты

Величина C_n^r по определению равна числу r-сочетаний n-множества. Следовательно, C_n^r определена при целых $n \ge 0$ и $r \ge 0$. Отметим легко проверяемые свойства C_n^r.

1. $C_n^r = 0$, при $r > n$.

2. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

3. $C_n^{n-r} = C_n^r$.

4. $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$, при $n \geq 1$.

Числа C_n^r называются *биномиальными коэффициентами*. Следующая теорема оправдывает это название.

Теорема 4.1. *Пусть $n > 0$ целое число. Справедлива формула*

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r y^{n-r}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Пусть S есть n-множество символов

$$(x+y)_1,\ (x+y)_2, \ldots, (x+y)_n.$$

Тогда для $r > 0$ коэффициент при $x^r y^{n-r}$ в разложении $(x+y)^n$ равен числу r-подмножеств множества S. По теореме 3.1 это число равно C_n^r. ■

Формула (1.6) называется *биномом Ньютона*. Положим в (1.6) $x = y = 1$. Тогда

$$\sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n. \tag{1.7}$$

Из формулы (1.7) следует, что число всех подмножеств n-множества равно 2^n.

Полагая в (1.6) $x = -1$ и $y = 1$, получим

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r = 0. \tag{1.8}$$

Для $r \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ обозначим

$$(x)_r = x(x-1)\ldots(x-r+1). \tag{1.9}$$

Определим функцию двух аргументов $\binom{x}{r}$, где $r \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathbb{R}$.

$$\binom{x}{r} = \begin{cases} \dfrac{(x)_r}{r!}, & \text{при } r > 0, \\ 1, & \text{при } r = 0, \\ 0, & \text{при } r < 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Нетрудно видеть, что при $n \geq 0$ и $r \geq 0$ величины C_n^r и $\binom{n}{r}$ совпадают. Числа $\binom{x}{r}$ также называются *биномиальными коэффициентами*.

Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$. Несложно видеть, что

$$f^{(r)}(x) = (\alpha)_r (1+x)^{\alpha - r}, \quad f^{(r)}(0) = (\alpha)_r.$$

Следовательно, по формуле Тейлора, имеем

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(0)}{r!}\, x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r}{r!}\, x^r.$$

В результате мы имеем ряд

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} x^r, \qquad (1.11)$$

абсолютно сходящийся при $|x| < 1$. Ряд (1.11) называется *биномиальным рядом.* При натуральных α ряд (1.11) переходит в бином Ньютона.

1.5 Полиномиальные коэффициенты

Пусть дано разбиение n-множества S на r_i-подмножества T_i, $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} T_i. \qquad (1.12)$$

Тогда

$$n = \sum_{i=1}^{k} r_i. \qquad (1.13)$$

Разбиение (1.12) называется $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$-разбиением множества S.

Разбиения множества S называются *упорядоченными*, если равенство разбиений

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} T_i \quad \text{и} \quad S = \bigcup_{i=1}^{k} T_i'.$$

означает, что $T_i = T_i'$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и *неупорядоченными*, если равенство разбиений означает, что каждое T_i равно некоторому T_j'.

Теорема 5.1. *Число упорядоченных $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$-разбиений n-множества равно*

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!}. \qquad (1.14)$$

Доказательство. По теорема 3.2 и по правилу произведения число упорядоченных $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$-разбиений n-множества равно

$$C_n^{r_1} C_{n-r_1}^{r_2} \ldots C_{n-r_1-\ldots-r_{k-1}}^{r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!}. \quad \blacksquare$$

Числа (1.13) называются *полиномиальными коэффициентами.*

Пример 1. При игре в бридж 52 карты делятся на 4 равные группы, и поэтому число различных раскладов равно

$$\frac{52!}{(13!)^4} = 53644737765488792839237440000 \approx 5{,}36447 \cdot 10^{28}.$$

Теорема 5.2. (Полиномиальная формула) *Справедлива формула*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geq 0, \ldots, r_k \geq 0 \\ r_1 + \ldots + r_k = n}} \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!} x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}. \qquad (1.15)$$

Доказательство. Аналогично доказательству теорема 4.1. $\blacksquare$

1.6 Принцип включения и исключения

В разработке?

1.7 Формула Стирлинга

Теорема 7.1. *Справедлива формула при* $n \geq 1$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\theta_n}, \tag{1.16}$$

где θ_n удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{12n+1} < \theta_n < \frac{1}{12n}, \tag{1.17}$$

Доказательство. См. [3] глава II, §9. ∎

Формула (1.16) называется *формулой Стирлинга.*

2 Вероятностное пространство.

2.1 Предмет теории вероятностей.

in statu nascendi

2.2 События.

Пусть задано некоторое множество Ω.

Определение 1. Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств Ω называется *алгеброй*, если

A1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$,

A3) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cup B,\; A \cap B \in \mathcal{A}$.

В условии A2) достаточно потребовать лишь, чтобы выполнялось либо $A \cup B \in \mathcal{A}$, либо $A \cap B \in \mathcal{A}$, в силу равенств

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}},\; A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}.$$

Определение 2. Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ-*алгеброй*, если $\mathcal{F}$ является алгеброй и

A3*) если $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F},\; \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

В условии A3*) достаточно потребовать лишь, чтобы выполнялось либо $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, либо $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Пара $(\Omega, \mathcal{F})$, состоящая из множества Ω и σ-алгебры $\mathcal{F}$ подмножеств Ω, называется *измеримым пространством.*

Переходим к аксиоматике теории вероятностей. Пусть дано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Множество Ω называется *пространством элементарных событий.* Элементы ω множества Ω называются *элементарными событиями.* Элементы σ-алгебры $\mathcal{F}$ называются *случайными событиями* или просто *событиями.* Все остальные подмножества множества Ω, т. е. подмножества не входящие в $\mathcal{F}$, событиями не являются.

Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$, являющееся объединением $A \cup B$. Событие $A + B$ состоит в том, что произошло по крайней мере одно из событий A или B.

Произведением событий A и B называется событие AB, равное пересечению $A \cap B$. Событие AB происходит тогда и только тогда, когда происходит и A и B. События A и B называются *несовместными* если $AB = \varnothing$.

Событие Ω называется *достоверным*; пустое множество $\varnothing$ называется *невозможным* событием. Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называется *противоположным* событию A. Событие $\overline{A}$ означает, что A не произошло.

Если $A \subset B$, то говорят, что событие A *влечёт* событие B.

2.3 Вероятность

Определение 1. Вероятностью на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ называется числовая функция $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, заданная на σ-алгебре событий $\mathcal{F}$, удовлетворяющая условиям:

P1) $\mathsf{P}(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность P);

P2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ (нормированность P);

P3) $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ для любых A, $B \in \mathcal{F}$, $AB = \varnothing$ (аддитивность P);

P4) если $A_n \downarrow \varnothing$, т. е. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = 0$ (непрерывность P).

Определение 2. Тройку $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, где Ω — пространство элементарных событий, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра событий, P — вероятность на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, называется *вероятностным пространством.*

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Тогда справедливы следующие свойства вероятности.

1. Справедливо равенство

$$\mathsf{P}(\varnothing) = 0. \tag{2.1}$$

◀ Так как $\varnothing + \varnothing = \varnothing$, то из P3) следует, что $\mathsf{P}(\varnothing) + \mathsf{P}(\varnothing) = \mathsf{P}(\varnothing)$. Следовательно $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$. ▶

2. Если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(B - A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$.

◀ Так как $B = A + (B - A)$ и $A(B - A) = \varnothing$, то из P3)

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B - A). \tag{2.2}$$

▶

3. Если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$.

◀ Следует из (2.2) и P1). ▶

4. Для любого $A \in \mathcal{F}$

$$0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1.$$

◀ Следует из **1**, **3**, так как $\varnothing \subset A \subset \Omega$. ▶

5. $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$ для любого события A.

◀ Следует из P3), так как $A + \overline{A} = \Omega$ и $A\overline{A} = \varnothing$. ▶

6. *Конечная аддитивность*: если $A_i A_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$, то

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i). \tag{2.3}$$

◀ Индукция по n с использованием P3). ▶

7. Для любых событий $A_1, \ldots, A_n$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k). \tag{2.4}$$

◂ Представим $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ в виде суммы попарно несовместных событий $B_k = A_k - (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1})$:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \coprod_{k=1}^{n} B_k.$$

Из аддитивности **6** имеем

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k),$$

откуда следует (2.4), так как $\mathsf{P}(B_k) \leq \mathsf{P}(A_k)$. ▸

8. Для любых событий A и B

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB).$$

◂ Из $A + B = A + (B - AB)$, P3) следует $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B - AB)$. Из свойства **2** получаем $\mathsf{P}(B - AB) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$. ▸

Аксиомы P3) и P4) можно заменить одной аксиомой *счётной аддитивности.*

P3*) Если последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ событий такова, что $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n). \tag{2.5}$$

Теорема 1. *Система аксиом* P1), P2), P3), P4) *равносильна системе аксиом* P1), P2), P3*).

Пример 2. *Бросание игральной кости.* Положим $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Доказательство. Будет позже. ■

2.4 Примеры вероятностных пространств

Дискретные вероятностные пространства

Пусть

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

— счётное множество, $\mathcal{F}$ — набор всех подмножеств Ω. Пусть p_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Для всякого события $A \in \mathcal{F}$ положим

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{n \in \{n:\, \omega_n \in A\}}^{\infty} p_n. \tag{2.6}$$

Нетрудно показать, что $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ является вероятностным пространством.

Построенное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ называется *дискретным вероятностным пространством.*

Отметим, что если $p_n = 0$ при $n > N$, то фактически мы имеем дело с конечным пространством $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$.

Абсолютно непрерывные вероятностные пространства

Пусть
$$\mathbf{\Omega} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
— n-мерное вещественное евклидово пространство, $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — неотрицательная функция, интегрируемая по Риману по любой квадрируемой области из $\mathbf{\Omega}$. Будем предполагать, что существует несобственный интеграл по $\mathbf{\Omega}$ от функции $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и
$$\int_{\Omega} \pi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1.$$
Обозначим через $\mathcal{F}$ алгебру, порождённую квадрируемыми областями в $\mathbf{\Omega}$. Для любого $A \in \mathcal{F}$ положим
$$\mathsf{P}(A) = \int_A \pi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad (2.7)$$
Можно показать, что $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ является вероятностным пространством.

Построенное вероятностное пространство $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ называется *абсолютно непрерывным вероятностным пространством.*

2.5 Геометрические вероятности.

Прочитать [1] Глава 2, §3.

3 Условные вероятности. Независимость

3.1 Условные вероятности

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Определение 1. Пусть A, B — некоторые события, причём $\mathsf{P}(B) > 0$. *Условной вероятностью* $\mathsf{P}(A\,|B)$ события A при условии, что произошло событие B, называется величина

$$\mathsf{P}(A\,|B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}. \tag{3.1}$$

Для условной вероятности $\mathsf{P}(A\,|B)$ применяется также обозначение $\mathsf{P}_B(A)$.

Запишем (3.1) в виде

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(A\,|B). \tag{3.2}$$

Равенство (3.2) называется *теоремой умножения.*

Пример 1. В урне находится M белых и $N-M$ чёрных шаров. Последовательно выбираются два шара без возвращения. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Обозначим события

$$A = \{\text{ 1-й вынутый шар — белый }\},$$
$$B = \{\text{ 2-й вынутый шар — белый }\}.$$

Тогда

$$\mathsf{P}(A) = \frac{M}{N}, \quad \mathsf{P}(B\,|A) = \frac{M-1}{N-1}.$$

Из теоремы умножения получаем

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B\,|A) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}. \quad \blacksquare$$

Теорема 3.1. (Теорема умножения.) *Пусть события A_1, …, A_n таковы, что* $\mathsf{P}(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$. *Тогда*

$$\mathsf{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2\,|A_1)\,\mathsf{P}(A_3\,|A_1A_2) \ldots \mathsf{P}(A_n\,|A_1 \ldots A_{n-1}). \tag{3.3}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование всех условных вероятностей в (3.3). Индукция по n. При $n = 2$ равенство (3.3) вытекает из (3.2). Пусть (3.3) справедливо при $n = k$. Докажем его при $n = k + 1$. Подставляя в (3.2) $B = A_1 \ldots A_k$ и $A = A_{k+1}$, получим

$$\mathsf{P}(A_1 \ldots A_k A_{k+1}) = \mathsf{P}(A_1 \ldots A_k)\,\mathsf{P}(A_{k+1}\,|A_1 \ldots A_k).$$

Из этого равенства и индукционного предположения следует (3.3) при $n = k + 1$. $\blacksquare$

3.2 Формула полной вероятности

Определение 2. Система событий B_1, B_2, …, B_n называется *конечным разбиением* Ω, если они попарно несовместны и

$$B_1 + B_2 + \ldots B_n = \Omega. \tag{3.4}$$

Теорема 3.2. (Формула полной вероятности.) *Пусть события $B_1, \ldots, B_n$ образуют конечное разбиение Ω и все $\mathsf{P}(B_k) > 0$. Тогда для любого события A справедлива формула*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k), \tag{3.5}$$

называемая формулой полной вероятности.

Доказательство. Из (3.4) следует разложение A на сумму

$$A = A\Omega = AB_1 + AB_2 + \ldots AB_n.$$

События AB_1, $AB_2 \ldots AB_n$ попарно независимы. Из конечной аддитивности P и теоремы умножения (3.2) получаем

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(AB_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k). \quad \blacksquare$$

Пример 2. В условиях примера 1 вычислим вероятность B, т. е. вероятность того, что 2-й вынутый шар белый.

Решение. Имеем

$$\mathsf{P}(A) = \frac{M}{N}, \quad \mathsf{P}(\overline{A}) = \frac{N-M}{N},$$
$$\mathsf{P}(B\,|A) = \frac{M-1}{N-1}., \quad \mathsf{P}(B\,|\overline{A}) = \frac{M}{N-1}.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B\,|A) + \mathsf{P}(\overline{A})\,\mathsf{P}(B\,|\overline{A}) = \frac{M}{N}\,\frac{M-1}{N-1} + \frac{N-M}{N}\,\frac{M}{N-1} = \frac{M}{N},$$

т. е. $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A)$. $\blacksquare$

Пример 3. Из урны, содержащей M и $N-M$ чёрных шаров утерян один шар неизвестного цвета. Какова вероятность вытащить наудачу из урны белый шар?

Решение. Пусть B_k — событие, состоящее в том, что утеряно k белых шаров ($k = 0,\ 1$); A — событие, состоящее в том, что шар, извлечённый из оставшихся шаров, оказался белым. Положим

$$\mathsf{P}(B_0) = \frac{N-M}{N}, \quad \mathsf{P}(B_1) = \frac{M}{N},$$
$$\mathsf{P}(A\,|B_0) = \frac{M}{N-1}, \quad \mathsf{P}(A\,|B_1) = \frac{M-1}{N-1}.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}(A) = \frac{N-M}{N}\,\frac{M}{N-1} + \frac{M}{N}\,\frac{M-1}{N-1} = \frac{M}{N},$$

Отметим, вероятность извлечения белого шара из урны до утери шара тоже равна M/N. $\blacksquare$

3.3 Формулы Байеса

Теорема 3.3. *Пусть события $B_1, \ldots, B_n$ образуют конечное разбиение Ω и все $\mathsf{P}(B_k) > 0$. Тогда для любого события A, $\mathsf{P}(A) > 0$, справедливы формулы*

$$\mathsf{P}(B_k\,|A) = \frac{\mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}(B_i)\,\mathsf{P}(A\,|B_i)}, \tag{3.6}$$

называемые формулами Байеса.

Доказательство. По теореме умножения

$$\mathsf{P}(B_kA) = \mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B_k\,|A).$$

Следовательно

$$\mathsf{P}(B_k\,|A) = \frac{\mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Применяя к знаменателю $\mathsf{P}(A)$ формулу полной вероятности (3.5), получаем (3.6). ■

Формулы Байеса можно интерпретировать следующим образом. Назовём события B_k гипотезами. Пусть событие A — результат некоторого эксперимента. Вероятности $\mathsf{P}(B_k)$ — это *априорные* вероятности гипотез, вычисляемые до проведения опыта, а условные вероятности $\mathsf{P}(B_k\,|A)$ — это *апостериорные* вероятности гипотез, вычисляемые после того, как известен результат эксперимента A. Формулы Байеса позволяют по априорным вероятностям гипотез и по условным вероятностям события A при гипотезах B_k вычислять апостериорные вероятности $\mathsf{P}(B_k\,|A)$.

Пример 4. Имеется пять урн следующего состава:

2 урны (состава B_1) по 2 белых и 3 чёрных шара,
2 урны (состава B_2) — 1 белый и 4 чёрных шара,
1 урна (состава B_3) — 4 белых и 1 чёрный шар.

Из одной наудачу выбранной урны взят шар. Он оказался белым (событие A). Чему равна после опыта вероятность (апостериорная вероятность) того, что шар вынут из урны третьего состава?

Решение. Согласно предположению

$$\mathsf{P}(B_1) = \frac{2}{5}, \quad \mathsf{P}(B_2) = \frac{2}{5}, \quad \mathsf{P}(B_3) = \frac{1}{5}$$
$$\mathsf{P}(A\,|B_1) = \frac{2}{5}, \quad \mathsf{P}(A\,|B_2) = \frac{1}{5}, \quad \mathsf{P}(A\,|B_3) = \frac{4}{5}.$$

Согласно формуле Байеса

$$\mathsf{P}(B_3\,|A) = \frac{\mathsf{P}(B_3)\,\mathsf{P}(A\,|B_3)}{\mathsf{P}(B_1)\,\mathsf{P}(A\,|B_1) + \mathsf{P}(B_2)\,\mathsf{P}(A\,|B_2) + \mathsf{P}(B_3)\,\mathsf{P}(A\,|B_3)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Аналогично $\mathsf{P}(B_1\,|A) = \frac{2}{5}$, $\mathsf{P}(B_2\,|A) = \frac{1}{5}$. ■

3.4 Независимость событий

Определение 3. События A и B называются *независимыми*, если

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B). \tag{3.7}$$

Если равенство (3.7) не выполняется, события будут называться *зависимыми.*

Приведём некоторые свойства независимых событий.

1. Если $\mathsf{P}(B) > 0$, то независимость A и B эквивалентна равенству

$$\mathsf{P}(A\,|B) = \mathsf{P}(A).$$

2. Если A и B независимы, то независимы $\overline{A}$ и B.

Это следует из

$$\mathsf{P}(\overline{A}B) = \mathsf{P}(B - AB) = \mathsf{P}(B)(1 - \mathsf{P}(A)) = \mathsf{P}(\overline{A})\,\mathsf{P}(B).$$

3. Пусть события A и B_1 независимы и независимы также события A и B_2, при этом $B_1B_2 = \varnothing$. Тогда независимы события A и $B_1 + B_2$.

Имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A(B_1 + B_2)) = \mathsf{P}(AB_1 + AB_2) = \mathsf{P}(AB_1) + \mathsf{P}(AB_2) = \\ = \mathsf{P}(A)(\mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B_1 + B_2).\end{aligned}$$

П р и м е р 5. Из колоды в 52 карты (состоящей из 13 карт каждой масти) случайно вынимается карта. Рассмотрим события

$$A = \{\text{ вынут туз }\}, \quad B = \{\text{ вынута карта бубновой масти }\}.$$

Тогда событие

$$AB = \{\text{ вынут туз }\}, \quad B = \{\text{ вынут туз бубновой масти }\}.$$

Имеем

$$\mathsf{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4},$$
$$\mathsf{P}(AB) = \frac{1}{52} = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B).$$

Следовательно, события A и B независимы.

Предположим теперь, что колода содержит ещё и джокер. В этом случае

$$\mathsf{P}(A) = \frac{4}{53}, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{13}{53},$$
$$\mathsf{P}(AB) = \frac{1}{53} \neq \frac{4 \cdot 13}{53^2} = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B).$$

Мы видим, что события A и B зависимы. ■

Определение 4. События A_1, A_2, $\ldots$, A_n называются *независимыми*, если для любых $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$, $2 \le m \le n$, выполняются равенства

$$\mathsf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_m}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\,\mathsf{P}(A_{i_2})\ldots\mathsf{P}(A_{i_m}); \tag{3.8}$$

в противном случае события называются *зависимыми.* Независимость нескольких событий называется иногда *независимостью событий в совокупности.*

Пример 6 (пример Бернштейна). На плоскость бросается тетраэдр, три грани которого покрашены соответственно в красный, синий и зелёный цвета, а на четвёртую нанесены все три цвета. Рассмотрим события

$$\begin{aligned} R &= \{ \text{ выпала грань, содержащая красный цвет } \}, \\ G &= \{ \text{ выпала грань, содержащая зелёный цвет } \}, \\ B &= \{ \text{ выпала грань, содержащая синий цвет } \}. \end{aligned}$$

Так как каждый из трёх цветов находится на двух гранях, то

$$\mathsf{P}(R) = \mathsf{P}(G) = \mathsf{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

Любая пара цветов присутствует только на одной грани, поэтому

$$\mathsf{P}(RG) = \mathsf{P}(RB) = \mathsf{P}(GB) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, события R, G, B попарно независимы. Так как

$$\mathsf{P}(RGB) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathsf{P}(R)\,\mathsf{P}(G)\,\mathsf{P}(B),$$

то мы видим, что события R, G, B зависимы.

4 Последовательности независимых испытаний

4.1 Схема Бернулли

Одинаковые независимые между собой испытания называются *схемой Бернулли* или *испытаниями Бернулли*, если при каждом испытании имеется только два возможных исхода, причём вероятности этих исходов положительны и неизменны для всех испытаний.

Исходы испытаний обычно называют *успехом* и *неудачей* и обозначают соответственно буквами p и q. Очевидно, что $p > 0$, $q > 0$ и

$$p + q = 1. \tag{4.1}$$

Опишем вероятностное пространство, соответствующее n испытаниям Бернулли. Будем считать, что исходами каждого испытания являются либо 0, либо 1. Пусть успеху соответствует 1, а неудаче — 0.

Пространством элементарных событий

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n),\ a_i = \text{У}, \text{Н}\}.$$

Вероятность элементарного события задаётся формулой

$$\mathsf{P}(\omega) = p^{\sum a_i} q^{n - \sum a_i}.$$

Теорема 4.1. *Если μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли, то*

$$\mathsf{P}(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Если число успехов элементарного события ω равно m, то $\mathsf{P}(\omega) = p^m q^{n-m}$. Очевидно, что количество таких событий равно C_n^m. ■

Пример 1. Монета подбрасывается 5 раз. Найти вероятность события A, состоящее в выпадении 3 гербов.

Решение. Выпадение герба будем считать успехом. Так как $p = q = \dfrac{1}{2}$, то из формулы (4.2) получаем

$$\mathsf{P}(A) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} = 0{,}3125. \quad ■$$

Одинаковые независимые между собой испытания называются *полиномиальной схемой*, если при каждом испытании имеется только k возможных исходов, причём вероятности этих исходов положительны и неизменны для всех испытаний. Схема Бернулли является является частным случаем полиномиальной схемы при $k = 2$.

Пусть E_1, E_2, …, E_k — исходы испытаний и $p_i = \mathsf{P}(E_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Очевидно, что $p_i > 0$ и

$$p_1 + \ldots + p_k = 1. \tag{4.3}$$

Теорема 4.2. *Рассмотрим полиномиальную схему, состоящую из n испытаний с возможными исходами E_1, E_2, …, E_k. Вероятность того, что событие E_i произойдёт r_i раз, $i = 1, \ldots, k$, равна*

$$P_n(r_1, \ldots, r_n) = \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!}\, p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вероятность элементарного события $\omega = (E_{i_1}, \dots, E_{i_n})$, в котором E_i встречается r_i раз, $i = 1, \dots, k$, равна $\mathsf{P}(\omega) = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$. Из теоремы 1.5.1 следует, что количество таких событий равно $\dfrac{n!}{r_1! \dots r_k!}$. ■

П р и м е р 2. Игральная кость бросается 12 раз. Найти вероятность события A, состоящее в том, что каждая грань выпадет дважды.

Р е ш е н и е. Пусть $E_1, \dots, E_6$ соответствуют шести граням. По условию все $p_i = 1/6$ и все $r_i = 2$. В силу (4.4) получаем

$$P(A) = \frac{12!}{(2!)^6}\left(\frac{1}{6}\right)^{12} = \frac{1925}{559872} = 0{,}003438\dots. \quad ■$$

4.2 Локальная предельная теорема

Будем рассматривать схему Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q. Число испытаний будем обозначать через n.

Теорема 4.3.(Локальная теорема Муавра-Лапласа.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха p, $0 < p < 1$, постоянна, то для любого конечного промежутка $[a, b]$, $a \le b$,*

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, (1 + O(n^{-1/2})). \tag{4.5}$$

равномерно для $x \in [a, b]$ вида

$$x = x_{mn} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{4.6}$$

где m — целое неотрицательное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство опирается на формулу Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp(\theta_n), \qquad \frac{1}{12n + 1} < \theta_n < \frac{1}{12n}.$$

Используя формулу Стирлинга, запишем

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\, p^m q^{n-m} = \frac{\sqrt{2\pi n}\, \mathrm{e}^{-n} n^n \exp\left(\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}\right) p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi m}\, \mathrm{e}^{-m} m^m \sqrt{2\pi(n-m)}\, \mathrm{e}^{-(n-m)} (n-m)^{n-m}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} \exp(\theta).$$

Здесь $\theta = \theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}$.

Из (4.6) следуют равенства

$$\begin{aligned} m &= np + x\sqrt{npq} = np\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right), \\ n - m &= nq - x\sqrt{npq} = nq\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Так как x принадлежит ограниченному промежутку $[a, b]$, то $m = O(n)$, $n - m = O(n)$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [a, b]$. Следовательно,

$$|\theta| \le |\theta_n| + |\theta_m| + |\theta_{n-m}| \le \frac{1}{12n} + \frac{1}{12m} + \frac{1}{12(n-m)} = O(n^{-1}).$$

Следовательно,
$$\exp(\theta) = 1 + O(n^{-1}) \tag{4.8}$$
при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [a, b]$.

Рассмотрим величину
$$\ln A_n = \ln\Big(\frac{np}{m}\Big)^m \ln\Big(\frac{nq}{n-m}\Big)^{n-m} = m \ln\Big(\frac{np}{m}\Big) + (n-m)\ln\Big(\frac{nq}{n-m}\Big).$$
Из равенств (4.7) следует
$$\ln A_n = -np\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - nq\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

Величины $x\sqrt{q/np}$ и $x\sqrt{p/nq}$ есть величины $O(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [a, b]$. Следовательно,
$$\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{np} + O(n^{-3/2})$$
$$\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}\frac{px^2}{nq} + O(n^{-3/2})$$
Таким образом, получаем
$$np\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = x\sqrt{npq} + qx^2 - \frac{qx^2}{2} + O(n^{-1/2}),$$
$$nq\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) = -x\sqrt{npq} + qx^2 - \frac{qx^2}{2} + O(n^{-1/2}),$$
и поэтому
$$\ln A_n = -\frac{x^2}{2} + O(n^{-1/2}). \tag{4.9}$$

Осталось рассмотреть множитель $\sqrt{\dfrac{n}{m(n-m)}}$. Из равенств (4.7) следует
$$m(n-m) = n^2pq\big(1 + O(n^{-1/2}\big).$$
Отсюда получаем
$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left((1 + O(n^{-1/2})\right). \tag{4.10}$$

Теперь утверждение теоремы следует из (4.8), (4.9), (4.10). ■

П р и м е р 3. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию $n = 400$, $m = 80$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. Из локальной теоремы Муавра-Лапласа имеем
$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$
Находим x:
$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = 0.$$

В результате
$$P_{400}(80) \approx= \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} = 0{,}049867785....$$
Точное значение
$$P_{400}(80) = \frac{400!}{80!\,320!}\,0{,}2^{80}\,0{,}8^{320} = 0{,}049813272.... \quad \blacksquare$$

4.3 Интегральная предельная теорема

Будем рассматривать схему Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q. Число испытаний будем обозначать через n. Пусть μ — число успехов в n испытаниях.

Теорема 4.4.(Интегральная теорема Муавра-Лапласа.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха p, $0 < p < 1$, постоянна, то равномерно по $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, имеет место соотношение*
$$\mathsf{P}\left\{a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx. \tag{4.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что $|a| \le C$, $|b| \le C$. Пусть $]x[$ — наименьшее целое число такое, что $x \le]x[$, а $[x]$ — наибольшее целое число такое, что $[x] \le x$. Пусть
$$m_1 =]\,np + a\sqrt{npq}\,[, \quad m_2 = [\,np + b\sqrt{npq}\,].$$
Тогда
$$\mathsf{P}\left\{a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \sum_{m=m_1}^{m_2} \mathsf{P}\{\mu = m\}. \tag{4.12}$$
Обозначим $m = np + x_m\sqrt{npq}$, тогда
$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$
По локальной предельной теореме запишем (4.12) в виде
$$\mathsf{P}\left\{a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x_m^2/2}\,\Delta x_m(1 + O(n^{-1/2})). \tag{4.13}$$
Справа в (4.13) стоит интегральная сумма, сходящаяся равномерно по a, b при $n \to \infty$ к интегралу
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx.$$
Следовательно, теорема доказана при $|a| \le C$, $|b| \le C$.

Избавимся теперь от ограничения $|a| \le C$, $|b| \le C$. Обозначим $\xi_n = \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}}$. Имеем равенство
$$\mathsf{P}\{|\xi_n| > C\} = 1 - \mathsf{P}\{|\xi_n| \le C\}. \tag{4.14}$$
Из анализа известно, что
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = 1.$$

Поэтому
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-C}^{C}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>C}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx. \tag{4.15}$$
Из (4.14) и (4.15) получаем
$$\left|\mathsf{P}\{|\xi_n|>C\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>C}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx\right| = \left|\mathsf{P}\{|\xi_n|\le C\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-C}^{C}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx\right|. \tag{4.16}$$
Пусть задано $\varepsilon>0$. Тогда найдётся такое C, что
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>C}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx<\frac{\varepsilon}{8}. \tag{4.17}$$
Зафиксируем C. По доказанному выше найдётся такое n_1, что для всех $n\ge n_1$
$$\left|\mathsf{P}\{|\xi_n|\le C\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-C}^{C}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{8},$$
откуда, в силу (4.16) и (4.17), для тех же $n\ge n_1$ имеем
$$\mathsf{P}\{|\xi_n|>C\}\le\frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.18}$$
Возьмём теперь произвольный интервал $[a,b]$. Обозначим $[A,B]=[a,b]\cap[-C,C]$. Так как $-C\le A\le B\le C$, то, по уже доказанному, существует такое n_2, что для всех $n\ge n_2$ справедливо неравенство
$$\left|\mathsf{P}\left\{\,\xi_n\in[A,B]\right\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A}^{B}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.19}$$
Из неравенства
$$\left|\mathsf{P}\left\{\,\xi_n\in[a,b]\right\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx\right|\le\mathsf{P}\{|\xi_n|>C\}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>C}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx+\left|\mathsf{P}\left\{\,\xi_n\in[A,B]\right\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A}^{B}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx\right|$$
получаем, в силу (4.17)–(4.19), что при $n\ge n_0=\max\{n_1,n_2\}$
$$\left|\mathsf{P}\left\{\,\xi_n\in[a,b]\right\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx\right|<\varepsilon$$
равномерно по всем $a\le b$. Теорема доказана. ■

Следствие 4.5. (Закон больших чисел Бернулли). *Пусть выполнены условия интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Тогда для любого* $\varepsilon>$ *справедливо равенство*
$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1. \tag{4.20}$$
Доказательство. Имеем
$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=\mathsf{P}\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}<\frac{\mu-np}{\sqrt{npq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}.$$
В силу интегральной теоремы Муавра-Лапласа
$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx=1. \quad ■$$

4.4 Применение интегральной теоремы Муавра-Лапласа

Введём функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ равенствами:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt. \tag{4.21}$$

Функция $\Phi(x)$ называется *нормальной функцией распределения*, а функция $\varphi(x)$ — *плотностью нормального распределения*.

Для конкретных расчётов используется функция

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt. \tag{4.22}$$

Значения функции $\Phi_0(x)$ при положительных x приведены в таблице 2 книги [1]. Для отрицательных x следует воспользоваться нечётностью $\Phi_0(x)$: $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$. Отметим формулу:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \Phi_0(x), & \text{при } x \geq 0, \\ \dfrac{1}{2} - \Phi_0(-x), & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{4.23}$$

Пример 4. В партии из $n = 22500$ изделий, каждое изделие независимо от других может быть бракованным с вероятностью $p = 1/5$. Найти вероятность того, что число μ_n бракованных изделий находится между 4380 и 4560.

Решение. Значение $npq = 3600$ велико, поэтому можно воспользоваться интегральной теоремой Муавра-Лапласа. Так как $np = 4500$, то неравенство

$$4380 < \mu_n < 4560$$

эквивалентно неравенству

$$-1 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < 2.$$

Из интегральной теоремой Муавра-Лапласа получаем

$$\mathsf{P}\{4380 < \mu_n < 4560\} = \mathsf{P}\left\{-1 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < 2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{2} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx.$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{2} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{2} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \Phi_0(1) + \Phi_0(2).$$

Из таблицы 2 в [1] находим: $\Phi_0(1) = 0{,}3413$, $\Phi_0(1) = 0{,}4772$. В результате

$$\mathsf{P}\{4380 < \mu_n < 4560\} = 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185. \ \blacksquare$$

4.5 Теорема Пуассона

Теорема 4.6.(Теорема Пуассона.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{4.24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\lambda = np$. Имеем

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} =$$
$$= \frac{\lambda_n^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-m}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Отсюда при $n \to \infty$ получим утверждение теоремы. ■

Обозначим

$$P_(m) = \frac{\lambda^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{4.25}$$

Полученное распределение вероятностей носит название *закона Пуассона*.

П р и м е р 5. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна $p =$ 0,001. Найти вероятность попадания в цель двумя и более пулями, если число выстрелов равно 5000.

Решение. Будем считать, что каждый выстрел это испытание и попадание в цель это событие. Нужно вычислить $\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\}$. В данном примере

$$\lambda = np = 0.001 \cdot 5000 = 5.$$

Искомая вероятность равна

$$\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\} = \sum_{m=2}^{\infty} P_n(m) = 1 - P_n(0) - P_n(1).$$

По теореме Пуассона

$$P_n(0) \approx \mathrm{e}^{-5}, \quad P_n(1) \approx 5\mathrm{e}^{-5}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\} \approx 1 - 6\mathrm{e}^{-5} = 0{,}9595723180\ldots$$

Точное вычисление даёт

$$P_n(0) = (1-p)^n = 0.999^{5000} = 0{,}006721111960,$$
$$P_n(1) = np(1-p)^{n-1} = 0.999^{5000} = 0{,}0336391990.$$

В результате

$$\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\} = 0{,}9596396890\ldots$$

Ошибка от использования теоремы Пуассона составляет около 0,007%. ■

5 Случайные величины и функции распределения

5.1 Определения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — произвольное вероятностное пространство.

Определение 1. Числовая функция $\xi(\omega)$ на множестве элементарных событий Ω называется *случайной величиной*, если для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$\{\xi < x\} = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}. \tag{5.1}$$

Из (5.1) следует, что

$$\begin{aligned} \{\xi \geq x\} &= \overline{\{\xi < x\}} \in \mathcal{F}, \\ \{x_1 \leq \xi < x_2\} &= \{\xi < x_2\} \setminus \{\xi < x_1\} \in \mathcal{F}, \\ \{\xi = x\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{x \leq \xi < x + \frac{1}{n}\Big\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Определение 2. Функция

$$F(x) = F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\}, \tag{5.3}$$

определённую при всех $x \in \mathbb{R}$, называется *функцией распределения*.

Очевидно, что функция распределения $F(x)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq F(x) \leq 1 \tag{5.4}$$

при всяком $x \in \mathbb{R}$

Введём обозначения

$$F(x-0) = \lim_{y \nearrow x} F(y), \quad F(x+0) = \lim_{y \searrow x} F(y), \quad F(\pm\infty) = \lim_{y \to \pm\infty} F(y).$$

Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1), \\ &\text{ii)} \quad \mathsf{P}\{\xi = x\} = F_\xi(x+0) - F_\xi(x), \\ &\text{iii)} \quad \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = F_\xi(x_2+0) - F_\xi(x_1), \\ &\text{iv)} \quad \mathsf{P}\{x_1 < \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1+0), \\ &\text{v)} \quad \mathsf{P}\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F_\xi(x_2+0) - F_\xi(x_1+0). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

i) Так как

$$\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} + \{x_1 \leq \xi < x_2\},$$

то из аддитивности P получаем

$$\mathsf{P}\{\xi < x_2\} = \mathsf{P}\{\xi < x_1\} + \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi < x_2\}.$$

Отсюда следует (i).

ii) Из непрерывности P, (5.2), (i) получим

$$\mathsf{P}\{\xi = x\} = \lim_{n\to\infty} \left(F_\xi\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - F_\xi(x) \right) = F_\xi(x+0) - F_\xi(x).$$

Равенства (iii), (iv), (v) доказываются аналогично. ■

П р и м е р 1. Рассмотрим схему Бернулли, состоящую из n испытаний с вероятностью успеха p. Обозначим через μ число успехов. Случайная величина μ принимает все целочисленные значения от 0 до n включительно. Согласно предыдущей главе

$$\mathsf{P}(\mu = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, \ldots, n.$$

Функция распределения случайной величины μ равна:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} P_n(k) & \text{при} \quad 0 < x \le n, \\ 1 & \text{при} \quad x > n. \end{cases}$$

Функция распределения представляет собой ступенчатую функцию со скачками в точках $x = 0, \ldots, n$; скачок в точке $x = k$ равен $P_n(k)$.

Каждая случайная величина однозначно определяет свою функцию распределения. Обратное неверно, т. е. одной функцию распределения могут соответствовать сколь угодно различных случайных величин.

П р и м е р 2. Пусть случайная величина ξ принимает два значения -1 и $+1$, каждое с вероятностью $1/2$. Случайная величина $\nu = -\xi$ всегда отлична от ξ. При этом обе эти случайные величины имеют одну и ту же функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ 1/2 & \text{при} \quad -1 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

5.2 Свойства функции распределения

Пусть ξ — случайная величина. Функция распределения $F(x) = F_\xi(x)$ обладает следующими свойствами:

F1. $F(x)$ не убывает.

F2. $F(x)$ непрерывна слева.

F3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда $\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\}$ и, следовательно, $F(x_1) \le F(x_2)$.

2. Пусть числовая последовательность $\{y_n\}$ возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Тогда

$$\{\xi < y_n\} \subset \{\xi < y_{n+1}\}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi < y_n\} = \{\xi < x_0\}.$$

Из непрерывности P и монотонности функции распределения получаем

$$F(x_0 - 0) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\xi < y_n\} = \mathsf{P}\{\xi < x_0\} = F(x_0).$$

3. В силу п. 1, F монотонна и поэтому существуют пределы $F(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$. Пусть $A_k = \{k-1 \le \xi < k\}$. Ясно, что $\Omega = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$ и $\mathsf{P}(A_k) = F(k) - F(k-1)$. Получаем

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N+1}^{N} \mathsf{P}(A_k) = \\ = \lim_{N\to\infty} \big(F(N) - F(-N)\big) = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Из неравенства (5.4) следует, что $0 \le F(\pm\infty) \le 1$. Следовательно, $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$. ■

Теорема 5.1. *Пусть Функция $F(x)$ обладает свойствами* F1, F2 *и* F3. *Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и случайная величина ξ на этом пространстве такая, что $F_\xi(x) = F(x)$.*

5.3 Дискретные и абсолютно непрерывные распределения

Распределение случайной величины ξ называется *дискретным*, если существует конечное или счётное множество чисел x_1, x_1, ... таких, что

$$\mathsf{P}\{\xi = x_n\} = p_n,\ n = 1, 2, \ldots; \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1. \tag{5.5}$$

Распределение случайной величины ξ называется *абсолютно непрерывным*, если существует неотрицательная функция $p_\xi(x)$ такая, что для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(u)\,du. \tag{5.6}$$

Функция $p_\xi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей.*

Очевидно

$$\mathsf{P}\{a \le \xi < b\} = \int_a^b p_\xi(x)\,dx,$$

$$\mathsf{P}\{\xi = a\} = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+\frac{1}{n}} p_\xi(x)\,dx = 0.$$

Отсюда следует, что для абсолютно непрерывных величин

$$\mathsf{P}\{a \le \xi \le b\} = \mathsf{P}\{a < \xi \le b\} = \mathsf{P}\{a \le \xi < b\} = \mathsf{P}\{a < \xi < b\}.$$

Приведём часто встречающиеся распределения. Сначала перечислим дискретные распределения.

1. *Вырожденное распределение*:

$$\mathsf{P}\{\xi = a\} = 1, \quad a \text{ — постоянная.}$$

2. *Гипергеометрическое распределение* (N, M, n — натуральные числа, $M \le N$, $n \le N$):

$$\mathsf{P}\{\xi = m\} = \frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \ldots, \min\{M, n\}.$$

3. *Биномиальное распределение* (n — натуральные число, $0 < p < 1$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

4. *Распределение Пуассона* ($\lambda > 0$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

5. *Геометрическое распределение* ($0 < p < 1$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2 \ldots$$

Теперь перечислим абсолютно непрерывные распределения, указав их плотность.

1. *Равномерное распределение на отрезке* $[a, b]$, $a < b$:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

2. *Нормальное распределение с параметрами* (a, σ^2) ($\sigma > 0$, $a \in \mathbb{R}$):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение также называется *гауссовым*. Нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$ называется *стандартным нормальным распределением*.

3. *Показательное распределение с параметром* $\lambda > 0$:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

6 Числовые характеристики случайных величин

6.1 Математическое ожидание

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Определение 1. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ, заданной на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, называется величина

$$\mathsf{M}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega), \tag{6.1}$$

если интеграл Лебега, стоящий в правой части равенства, существует.

Переформулируем определение математического ожидания в наиболее важных случаях.

Математическим ожиданием $\mathsf{M}\xi$ случайной величины ξ, заданной на дискретном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, называется число

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(\omega_k)\, \mathsf{P}(\omega_k), \tag{6.2}$$

если ряд (6.2) абсолютно сходится. Если ряд (6.2) не сходится абсолютно, то говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ не существует.

Математическим ожиданием $\mathsf{M}\xi$ случайной величины ξ, заданной на абсолютно непрерывном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, называется число

$$\mathsf{M}\xi = \int_{\Omega} \xi(x_1, \ldots, x_n)\pi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{6.3}$$

если интеграл (6.1) абсолютно сходится. Если интеграл (6.1) не сходится абсолютно, то говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ не существует.

Теорема 6.1.

1. *Если c — постоянная, то* $\mathsf{M}c = c$.

2. *Если c — постоянная, то* $\mathsf{M}\,(c\xi) = c\mathsf{M}\xi$.

3. *Для любой случайной величины ξ*

$$|\,\mathsf{M}\xi\,| \le \mathsf{M}\,|\,\xi\,|.$$

4. *Для любых случайных величин ξ_1 и ξ_2*

$$\mathsf{M}\,(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{M}\xi_1 + \mathsf{M}\xi_2.$$

5. *Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то*

$$\mathsf{M}\xi_1\xi_2 = \mathsf{M}\xi_1 \cdot \mathsf{M}\xi_2.$$

Доказательство. Без доказательства ■

Теорема 6.2. *Пусть случайная величина ξ имеет дискретное распределение. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |g(x_n)|\, \mathsf{P}\{\xi = x_n\} < \infty$, тогда случайная величина $g(\xi)$ имеет математическое ожидание*

$$\mathsf{M}g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)\, \mathsf{P}\{\xi = x_n\} \tag{6.4}$$

В частности
$$\mathsf{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, \mathsf{P}\{\xi = x_n\} \tag{6.5}$$
Доказательство. Без доказательства ■

Теорема 6.3. *Пусть случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $p(x)$. Если $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, p(x)\, dx < \infty$, тогда случайная величина $g(\xi)$ имеет математическое ожидание*
$$\mathsf{M}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)\, dx. \tag{6.6}$$
В частности
$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\, dx. \tag{6.7}$$
Доказательство. Без доказательства ■

6.2 Дисперсия

Определение 2. *Дисперсией* случайной величины ξ называется величина
$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\,(\xi - \mathsf{M}\xi)^2, \tag{6.8}$$
если математическое ожидание, стоящее в правой части равенства, существует. Дисперсия является мерой рассеяния значений случайной величины около её математического ожидания. Величина $\sqrt{\mathsf{D}\xi}$ называется *средним квадратическим отклонением*.

Преобразуем правую часть (6.8). Имеем
$$\mathsf{M}\,(\xi - \mathsf{M}\xi)^2 = \mathsf{M}\,(\xi^2 - 2\xi\,\mathsf{M}\xi + (\mathsf{M}\xi)^2) = \mathsf{M}\xi^2 - 2\mathsf{M}\xi \cdot \mathsf{M}\xi + (\mathsf{M}\xi)^2.$$
Подставляя в (6.8), получаем
$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2. \tag{6.9}$$

Если случайная величина ξ имеет дискретное распределение, то из (6.4) при $g(x) = (x - \mathsf{M}\xi)^2$ получаем
$$\mathsf{D}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - \mathsf{M}\xi)^2\, \mathsf{P}\{\xi = x_n\} \tag{6.10}$$

Аналогично для случайной величины ξ с абсолютно непрерывным распределением из (6.6) будем иметь
$$\mathsf{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathsf{M}\xi)^2 p(x)\, dx. \tag{6.11}$$

Теорема 6.4.

1. *Для любой случайной величины ξ справедливо неравенство* $\mathsf{D}\xi \geq 0$.

2. *Если c — постоянная, то* $\mathsf{D}c = 0$.

3. *Если c — постоянная, то*

$$\mathsf{D}\,(c\xi) = c^2\mathsf{D}\xi, \quad \mathsf{D}\,(\xi + c) = \mathsf{D}\xi$$

4. *Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то*

$$\mathsf{D}\,(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{D}\xi_1 + \mathsf{D}\xi_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойства 1 – 3 следуют непосредственно из определения и свойств математического ожидания.

Докажем свойство 4. По определению (6.8)

$$\begin{aligned}\mathsf{D}\,(\xi_1 + \xi_2) &= \mathsf{M}\,[(\xi_1 + \xi_2) - \mathsf{M}\,(\xi_1 + \xi_2)]^2 = \mathsf{M}\,[(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1) + (\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2)]^2 = \\ &= \mathsf{M}\,[(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1)]^2 + \mathsf{M}\,[(\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2)]^2 + 2\mathsf{M}\,[(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2)].\end{aligned}$$

Так как случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то

$$\mathsf{M}\,[(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2)] = 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{D}\,(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{M}\,[(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1)]^2 + \mathsf{M}\,[(\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2)]^2 = \mathsf{D}\xi_1 + \mathsf{D}\xi_2. \quad \blacksquare$$

6.3 Примеры

При расчёте tv-5-1-05 tv-5-1-07

tv-5-2-03 tv-5-2-04

Приведём часто встречающиеся распределения. Сначала перечислим дискретные распределения.

1. *Вырожденное распределение.* В этом случае очевидно, что

$$\mathsf{M}\xi = a, \quad \mathsf{D}\xi = 0. \tag{6.12}$$

2. *Биномиальное распределение* ($n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$). Имеем

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathsf{P}\,\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Так как $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, то

$$\mathsf{M}\xi = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}\,p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np(p + (1-p))^{n-1} = np.$$

Найдём $\mathsf{M}\,[\xi(\xi - 1)]$. Запишем

$$\mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Учитывая равенство $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$, получим

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)] &= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2}\,p^{k-2}(1-p)^{n-k} = \\ &= n(n-1)p^2(p + (1-p))^{n-2} = n(n-1)p^2.\end{aligned}$$

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = \mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)] + \mathsf{M}\xi - (\mathsf{M}\xi)^2.$$

Следовательно

$$\mathsf{D}\xi = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

В результате

$$\mathsf{M}\xi = np, \quad \mathsf{D}\xi = np(1-p) = npq. \tag{6.13}$$

3. *Распределение Пуассона* ($\lambda > 0$).

Найдём $\mathsf{M}\xi$.

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathsf{P}\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$$

Вычислим $\mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)]$. Имеем

$$\mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2.$$

Далее

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = \mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)] + \mathsf{M}\xi - (\mathsf{M}\xi)^2 = \lambda.$$

В результате

$$\mathsf{M}\xi = \lambda, \quad \mathsf{D}\xi = \lambda. \tag{6.14}$$

Теперь абсолютно непрерывные распределения.

4. *Равномерное распределение на отрезке* $[a, b]$, $a < b$:

$$\mathsf{M}\xi = \int_a^b xp(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{2}\,(b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}.$$

Далее

$$\mathsf{M}\xi^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{3}\,(b^3 - a^3) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Найдём дисперсию.

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

В результате

$$\mathsf{M}\xi = \frac{a+b}{2}, \quad \mathsf{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{6.15}$$

5. *Нормальное распределение с параметрами* (a, σ^2) ($\sigma > 0$, $a \in \mathbb{R}$).

$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Сделаем замену $x = a + t\sigma$. Тогда

$$\mathsf{M}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a + t\sigma)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt.$$

Учитывая, что
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}, \tag{6.16}$$
получим $\mathsf{M}\xi = a$.
$$\mathsf{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathsf{M}\xi)^2 p(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$
После замены переменной $x = a + t\sigma$
$$\mathsf{D}\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt.$$
Значение интеграла сведём к (6.16) интегрированием по частям:
$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = t\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt.$$
В результате
$$\mathsf{M}\xi = a, \quad \mathsf{D}\xi = \sigma^2. \tag{6.17}$$

Список литературы

[1] Чистяков В. П. *Курс теории вероятностей.* — 2-е изд. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

[2] Гнеденко Б. В. *Курс теории вероятностей*: Учебник. Изд. 10-е, доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 488 с. (Классический университетский учебник.)

[3] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения.* В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 528 с.

[4] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения.* В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ. — М.: Мир, 1964. — ??? с.

[5] Севастьянов Б. А. *Курс теории вероятностей и математической статистики.* — М.: Наука, 1982. — 256 с.

[6] Зубков А.М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Сборник задач по теории вероятностей.* — 2-е изд.— М.: Наука, 1989. — 320 с.