Модуль 3. Тема 1. Электростатическое поле в вакууме

Электрический заряд. Величина заряда, единицы измерения. Квантование заряда. Точечный, распределенный и пробный заряд. Объемная, поверхностная и линейная плотности заряда. Закон сохранения электрического заряда. Единицы измерения плотностей заряда. Закон Кулона. Электрическое поле. Вектор напряженности электрического поля, его величина и направление. Принцип суперпозиции. Силовые линии, картины силовых линий для точечного заряда, диполя, заряженной сферы.

1.1. Электрический заряд

1.1.1 Электромагнитное взаимодействие, электрические заряды, величина заряда и его квантование.

Многие элементарные частицы (называемые носителями электрического заряда) создают вокруг себя особый род материи – *электромагнитное поле*, которое является переносчиком силовых взаимодействий между этими частицами. Благодаря взаимодействию с частицами-носителями заряда, электромагнитное поле также является носителем информации в современных информационных системах (связи, радио- и телевещания и т.д.). Согласно фундаментальному принципу физики - *принципу близкодействия* - взаимодействие между частицами-носителями заряда переносится электромагнитным полем в пространстве с конечной, вполне определенной скоростью. Эта скорость называется *скоростью света.* Свет – это чувственно обнаружимая (действующая на зрение человека) разновидность электромагнитного поля (точнее, электромагнитных *волн,* более подробно об этих волнах см. в Модуле 8).

Величина электрического заряда (иначе, просто электрический заряд) – численная характеристика носителей заряда и заряженных тел. Величина заряда любого заряженного тела определяется как такой параметр заряженного тела, которому прямо пропорционально силовое воздействие электромагнитного поля на тело. которая, может принимать положительные и отрицательные значения. Таким образом, фундаментальным свойством заряда является его существование в двух видах – положительном и отрицательном. Тот заряд, который мы для определенности называем положительным, можно было бы назвать отрицательным и наоборот. Два знака заряда это лишь способ выразить возможность заряженных тел не только притягиваться (заряды разного знака), но и отталкиваться (заряды одного знака). В этом состоит главное отличие электромагнитного взаимодействия тел от их гравитационного взаимодействия.

Электрический заряд любой элементарной частицы присущ этой частице все время ее жизни, поэтому элементарные заряженные частиц зачастую отождествляют с их электрическими зарядами. Более того, небольшие заряженные тела, которые можно считать материальными точками, тоже часто называют зарядами. При силовом взаимодействии двух таких малых заряженных тел, сила, с которой они действуют друг на друга, прямо пропорциональна величине их зарядов. Направления сил, действующих на них со стороны электромагнитного поля, зависят, как уже сказано, от знака зарядов. Наиболее известные элементарные носители заряда – электроны, имеющие отрицательный заряд e и протоны, имеющие (неизвестно почему, но это факт) такой же по величине положительный заряд. В системе СИ электрический заряд измеряется в *кулонах. Заряд электрона в системе СИ* $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, заряд протона $|e| = e^{+} = 1.6 \cdot 10^{-19}$. Электрический заряд любого заряженного тела кратен e**.** Этот факт называется квантованием заряда, и он объясняется тем, что все атомы состоят именно из электронов и протонов, а также незаряженных частиц (нейтронов). Другие заряженные частицы, которые могут существовать на внутриатомном уровне (например, мезоны или гипотетические кварки) являются крайне короткоживущими и не принимают участия в электромагнитном взаимодействии тел.

В целом, в природе отрицательных зарядов столько же, сколько положительных. Электрические заряды атомов и молекул равны нулю, а заряды положительных и отрицательных ионов в каждой ячейке кристаллических решеток твердых тел скомпенсированы. Поэтому возникновение зарядовых систем обусловлено не рождением электрических зарядов, а их *разделением*, возникающим, например, при трении (см. также Тема 4*)*. Ниже, говоря об электрических зарядах, слово “электрический” будем опускать.

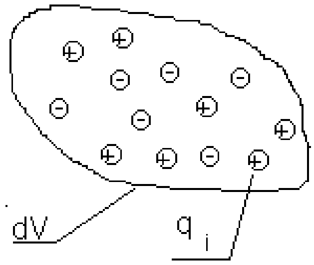
1.1.2. Точечный и пробный заряды

Точечным зарядом называется заряженное тело или частица, размеры которого (которой) пренебрежимо малы по сравнению с расстояниями до других зарядов рассматриваемой системы. Точечный заряд такая же физическая идеализация, как и материальная точка в механике. Реальный заряд занимает в пространстве ненулевое место, т.е. является *распределенным* зарядом. *Пробным* зарядом называется положительный точечный заряд, который вносится в данное электромагнитное поле для измерения его характеристик. Этот заряд должен быть достаточно мал, чтобы не нарушать положение зарядов–источников измеряемого поля и тем самым, не искажать существующее поле. Таким образом, пробный заряд служит индикатором электромагнитного поля.

1.1.3. Пространственные распределения заряда

Понятия *объемной плотности заряда* (ρ), *поверхностной плотности заряда* (σ) и *линейной плотности заряда* (τ) определяются нижеследующими формулами, в которых указаны единицы измерений для объемной плотности, поверхностной плотности и линейной плотности заряда (см. также рис. 1.1-1.3):

$$\rho = \frac{\sum_i q_i}{dV} \quad [\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}], \qquad \sigma = \frac{\sum_i q_i}{dS} \quad [\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}], \quad \tau = \frac{\sum_i q_i}{dl} \quad [\frac{\text{Кл}}{\text{м}}].$$



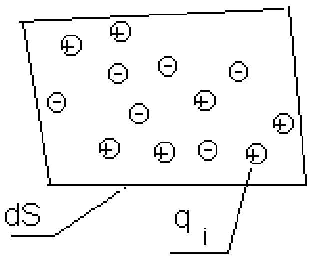


Рис. 1.1 К понятию объемной плотности заряда. Рис. 1.2 Поверхностная плотность заряда.

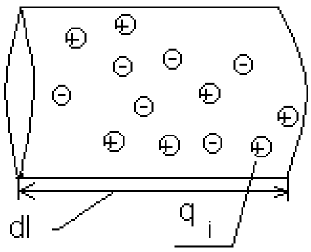


Рис. 1.3 Линейная плотность заряда.

При определении величин ρ, σ, τ объем *dV*, площадка *dS* и отрезок *dl* выбираются малыми по сравнению с объемом (площадью, длиной, соответственно) заряженного тела, но содержащими много элементарных заряженных частиц q_i (электронов, ионов).

1.1.4 Свойства зарядов

1.1.4.1 Закон сохранения заряда.

Сформулирован М. Фарадеем в 1843 на основе обобщения опытных данных. *Заряд электрически замкнутой системы (через поверхность которой не переносятся заряженные частицы) не изменяется, какие бы процессы в ней не происходили*. Следствие из этого закона: если зарядовая система 1 отдает заряд системе 2, то система 2 получает ровно такой заряд, какой теряет система 1. Если тело в данном процессе не разрушается, не соединяется с другим заряженным телом, в том числе не теряет элементарные заряженные частицы и не подхватывает новые, то его заряд не меняется.

1.1.4.2 Релятивистская инвариантность заряда.

Сформулирован Г. Лоренцем в 1877 г. также на экспериментальной основе. *Заряд любого тела инвариантен относительно любых систем* *отсчета*. Следствие из этого закона: заряд тела не зависит ни от его скорости, ни от ускорения, как и от любых других параметров движения.

1.1.5 Процессы возникновения и исчезновения свободных зарядов

1.1.5.1 Ионизация при столкновении атомов и атома с электроном:

$$A + B \to A^{+} + B + e \qquad A + B \to A^{-} + B^{+} \qquad A + e \to A^{-}$$

Первая формула есть обозначение атомной реакции, в которой при столкновении движущихся с большой скоростью атомов А и В, от атома А отделяется электрон. Атом, в котором не хватает одного электрона, называется однозарядным ионом. Вторая реакция соответствует образованию двух ионов разного знака при столкновении двух быстрых атомов. Третья реакция – прилипание электрона к атому (причем образуется положительный однозарядный ион) – может наблюдаться и при малых скоростях частиц. Возможна ионизация и с образованием многозарядных ионов, но этот процесс происходит реже.

1.1.5.2 Рождение электрона и позитрона при столкновении гамма-квантов:

Гамма-кванты – это так называемые квазичастицы (приставка «квази» означает, что они не обладают ни зарядом ни даже массой покоя), которые формируют само электромагнитное поле чрезвычайно высоких частот. Аналогом гамма-квантов в диапазоне рентгеновского и оптического излучений являются фотоны. Нижеследующая реакция отражает процесс превращения квазичастиц (поля) в частицы (вещества), т.е. превращение поля в вещество. Она называется реакией реаннигиляции:

$$\gamma + \gamma \to e + e^{+}$$

1.1.5.3 Рекомбинация ионов разного знака, а также иона и электрона

При рекомбинации в результате атомной реакции из заряженных частиц образуются нейтральные. Две основных реакции рекомбинации таковы

$$A^{+} + B^{-} \to A + B \qquad A^{+} + e \to A$$

1.1.5.4 Аннигиляция (уничтожение) пары электрон-позитрон

Аннигиляция является процессом, приводящим к возникновению гамма-квантов, поток которых называется гамма-излучением. Таким образом, аннигиляция – это переход частиц вещества в квазичастицы поля. Как и реаннигиляция, аннигиляция убедительно подтверждает материальность электромагнитного поля:

$$e + e^{+} \to \gamma + \gamma$$

1.2. Электрическое поле.

1.2.1 Закон Кулона (взаимодействие точечных зарядов)

Экспериментально установлен Ш. Кулоном в 1785 г. Для неподвижных точечных зарядов в вакууме (или воздухе) сила взаимодействия дается нижеследующей формулой:

$$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^{\ 3}} \mathbf{r}_{12} \quad (1.1)$$

Из (1.1) вытекает, что для силы взаимодействия зарядов выполняется 3-й закон Ньютона $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. На рис.1 показаны случай А (разноименные заряды 1 и 2, сила их взаимодействия

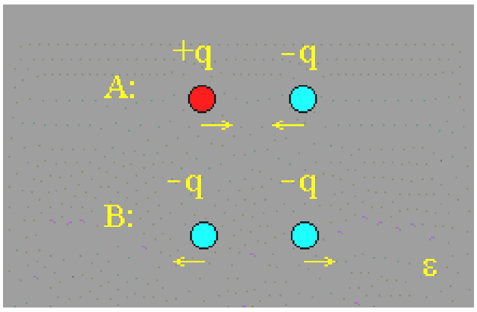


Рис. 1.4 Иллюстрация к закону Кулона для случаев разноименных и одноименных зарядов.

есть сила притяжения) и случай В (одноименные заряды 1 и 2 на рисунке для примера они отрицательны, сила их взаимодействия есть отталкивания). Коэффициент в законе Кулона в системе СИ измеряется в метрах, деленных на *фараду.* Этот коэффициент численно равен $k_e = 9 \cdot 10^9$, его часто записывают в виде $k_e = 1/4\pi\varepsilon_0$. Параметр ε_0 называют *диэлектрической проницаемостью вакуума*. В среде, которая не проводит электрический ток, сила взаимодействия между зарядами уменьшается по сравнению со случаем взаимодействующих зарядов в вакууме (вне зависимости от величин зарядов и расстояний между ними). Это уменьшение, таким образом, определяется влиянием среды. Оно учитывается введением параметра ε называемого *относительной диэлектрической проницаемостью (*для большинства сред имеет место ε >1), в коэффициент, k_e, входящий в формулу закона Кулона. А именно $k_e = 1/4\pi\varepsilon_0\varepsilon$. Коэффициент $\varepsilon_0\varepsilon$ часто называют абсолютной диэлектрической проницаемостью и иногда также обозначают буквой ε.

Если два заряда в лабораторной системе отсчета движутся с некоторой скоростью, то в силе с которой они взаимодействуют, выделяют электрическую составляющую, которая направлена вдоль линии соединяющей заряды. Эта (электрическая) сила, строго говоря, уже не подчиняется закону Кулона. Последний выполняется лишь при малых скоростях частиц и притом приближенно. Электрическая сила соответствует электрической составляющей электромагнитного поля. Электростатическое поле, таким образом, есть частный случай случай электрического поля, соответствующий нулевой скорости заряда-источника поля. Второй составляющей электромагнитного поля является магнитное поле, которое тоже создается движущимися зарядами (подробнее см. Тема 4). Сила, с которой магнитная составляющая электроманитного поля действует на пробный заряд, зависит от скорости пробного заряда. Сила, с которой на пробный заряд действует электрическое поля, от этой скорости не зависит.

1.2 Электростатическое поле

1.2.1. Понятие вектора напряженности E

Если все заряды, создающие электромагнитное поле, в данной системе отсчета неподвижны, то (в этой системе отсчета) поле называется *электростатическим.* Строго говоря, электростатическое поле – физическая идеализация, т.к. это понятие предполагает, что после образования зарядовой системы передача взаимодействия между зарядами уже закончилось. Заряды заняли равновесные положения, при которых силы, действующие на каждый заряд со стороны электростатического поля всех других зарядов, не меняются во времени (например, скомпенсированы другими силами). Однако эта идеализация начинает работать с очень высокой точностью через очень малое время, после остановки зарядов.

В каждой точке пространства, где есть электромагнитное поле, на пробный заряд q действует определенная сила, зависящая (при заданных зарядах-источниках поля) от величины пробного заряда и его положения относительно источников. При фиксированной величине заряда q, покоящегося в заданном электростатическом поле, эта сила зависит только от его координат (x,y,z). *Напряженностью электрического поля* называется сила, действующая со стороны электромагнитного поля на пробный заряд q, покоящийся в точке (x,y,z), отнесенная к величине самого этого заряда:

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\frac{\mathbf{F}_q(x,y,z)}{q} \quad (1.2)$$

Формула (1.2) дает определение напряженности *электростатического поля*, если известно, что заряды-источники поля также покоятся. Если заряды-источники не покоятся, то сила, действующая на неподвижный заряд, является электрической силой (магнитная сила на покоящийся пробный заряд не действует). Зная **E** как функцию координат нетрудно найти силу, действующую в данном поле на данный заряд в любой точке:

$$\mathbf{F}_q = q\mathbf{E} \quad (1.3)$$

Из закона Кулона (1.1) и определения (1.2) очевидно следует, что вектор напряженности электростатического поля, созданного точечным зарядом Q на расстоянии r от него, и модуль этого вектора определяются формулами:
Поскольку электростатическое поле создается, в конечном счете, точечными зарядами (любое заряженное тело можно рассматривать как

$$\mathbf{E} = k_e \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}, \ \mathrm{E} = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (1.4)$$

систему микроскопических заряженных частиц), то сила, действующая на пробный заряд со стороны произвольного электростатического поля, есть сумма сил, действующих на пробный заряд со стороны каждого точечного источника. Отсюда следует *принцип суперпозиции,* который посредством формулы (1.4) можно выразить формулой для суммы *полей точечных зарядов* в точке, удаленной на расстояния r_i от них:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{N} k_e \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i \quad (1.5)$$

Если расстояние от каждого из зарядов до точки наблюдения много больше расстояний между зарядами, то во многих случаях формулу (1.5) можно приближенно заменить формулой (1.4), где Q –суммарный заряд системы, а r – расстояние от какой-либо точки внутри системы заряженных частиц, например от точки их центра масс. При этом, если Q =0, т.е. система зарядов *электрически нейтральна*, поле вдали от системы практически отсутствует. Именно поэтому большинство тел, хоть и содержит множество заряженных частиц, не создают поля. Однако этот результат справедлив не для всех зарядовых систем. Системы с Q =0, обладающие т.н. *дипольным моментом* (см. ниже), создают вокруг себя заметное поле. Принцип суперпозиции выполняется и в динамическом случае, т.е. если заряды-источники поля движутся.

1.2.2. Расчет напряженности распределенных зарядовых систем

При разбиении заряженного тела объемом V на большое число N малых частей, каждая такая часть может быть рассмотрена как точечный заряд, напряженность поля которого $d\mathbf{E}_i$, вычисляется по закону (5). Применяя принцип суперпозиции для бесконечного N, получаем напряженность тела как объемный интеграл.

$$\mathbf{E} = \sum_{i}^{N} d\mathbf{E}_i \rightarrow \int_V d\mathbf{E} \qquad d\mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = k_e \frac{dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

Аналогично рассчитывают поля от заряженной поверхности (поверхностный интеграл) и от линейного заряженного тела (линейный интеграл). На рис.5 показан случай заряженной поверхности и приведена формула (7) для расчета декартовой компоненты напряженности через интеграл.

$$E_x(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(x - x')dS \quad (1.6).$$

Аналогично для двух других компонент:

$$E_y(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(y - y')dS \qquad E_z(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(z - z')dS \quad (1.7)$$

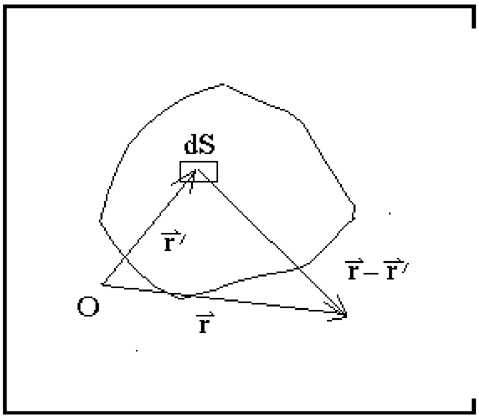


Рис. 1.5. К расчету напряженности **E**.

1.3 Силовые линии электростатического поля

Силовой линией электростатического поля называется пространственная линия, в каждой точке которой вектор напряженности этого поля является касательным. Свойства электростатических силовых линий вытекают из этого определения, формулы для напряженности поля точечного заряда (1.4) и принципа суперпозиции (1.5). Силовые линии электростатического поля не бывают замкнутыми, не пересекаются вне зарядов, начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных или уходят в бесконечность.

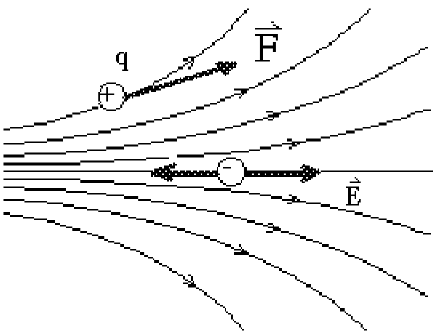


Рис. 1.6. О связи силовых линий с направлением электрической силы и напряженности.

На рис. 1.6 показаны векторы напряженности и силы, действующей на пробный заряд в соответствии с картиной силовых линий поля, созданного некими источниками. На рис. 1.7 показана картина силовых линий точечного заряда, соответствующая формуле (1.4). На рис. 1.8 (б) показаны силовые линии так называемого *электрического диполя*. Электрическим диполем называется зарядовая система, электрически эквивалентная паре точечных зарядов, одинаковых по величине и противоположных по знаку, отстоящих друг от друга на расстояние l (см. рис. 1.8 (а)). *Дипольным моментом* такой пары называется векторная величина $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$. Вектор $\mathbf{l}$ считается направленным от $-q$ к $+q$. . *Единица измерения дипольного момента* в системе СИ -*Кл·м*.. Диполи, состоящие из двух точечных зарядов, являются физической идеализацией (моделью). Эта модель, однако, может быть отнесена к реальным объектам, например, к поляризованному атому (см. Модуль 3, Тема 4). Дело в том, что равномерно заряженная сфера (например ядро атома) создает вокруг себя точно такое же поле, как и точечный заряд, так что картина силовых линий – та же, что и на рис. 1.7 (с одним отличием для пустотелой сферы с поверхностным распределением заряда, в этом случае внутри сферы силовых линий нет, так как поле внутри нее равно нулю).

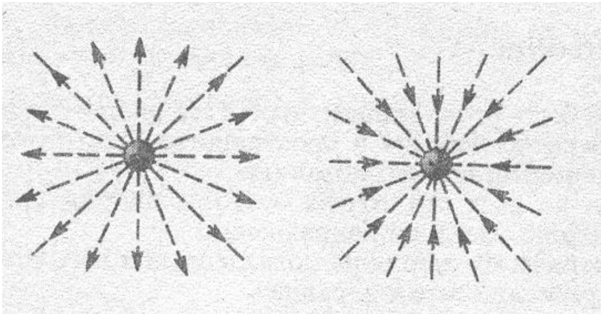
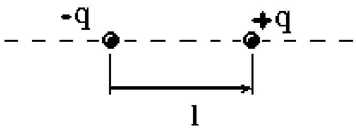
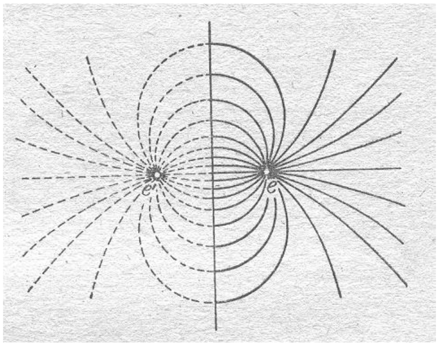


Рис. 1. 7 Силовые линии поля точечного заряда (положительного слева, отрицательного справа).





(а) **(б)**

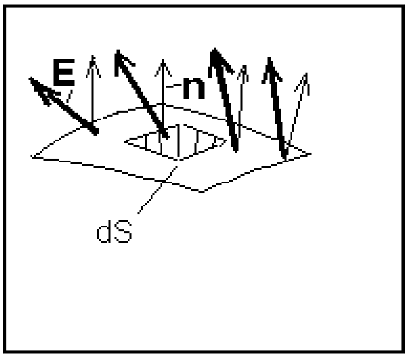
Рис. 1. 8. Электрический диполь и силовые линии его поля. Через центр диполя проходит плоскость симметрии. Силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному.

Модуль 1. Тема 2. Теорема Гаусса для вектора напряженности E.

Поток вектора напряженности (в том числе через элементарную площадку и через произвольную замкнутую поверхность). Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах. Примеры применения теоремы Гаусса.

2.1. Поток $d\Phi$ вектора E через элементарную площадку dS.

Пусть **n** – единичная нормаль к элементарной (достаточно малой, чтобы пренебречь изменением **E** в пределах площадки) площадке dS. *Элементарный поток вектора* **E** (обозначается $d\Phi$) определяется как произведение нормальной компоненты **E** на dS:

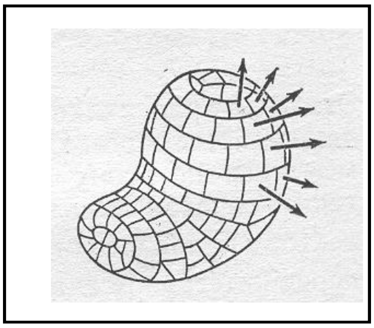


$$d\Phi = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})dS = E_n dS \quad (2.1)$$

Рис. 2.1 Вектор E меняется от точки к точке на большой поверхности, но практически однороден на малой площадке dS.

Знак потока $d\Phi$, очевидно, зависит от выбора одного из двух возможных направлений нормали. Обычно вектор **n** выбирают так, чтобы угол между **n** и **E** был острым или (если E ортогонально площадке) нулевым.

2.2. Поток вектора E через замкнутую поверхность.



$$\Phi = \sum_i^N d\Phi_i \quad (2.2)$$

$$\Phi = \oint_S E_n dS \quad (2.3)$$

Рис. 2.2 Иллюстрация к понятию Ф.

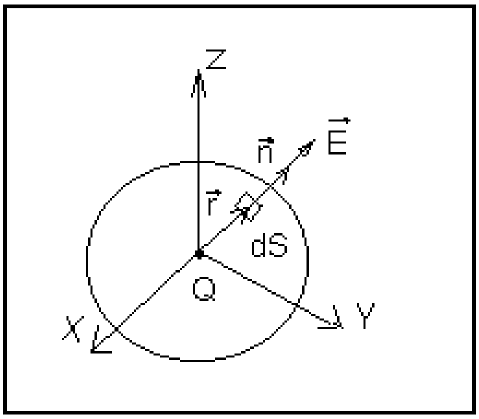
Поток Φ вектора **E** через замкнутую поверхность определяется по формуле (2.2) как сумма элементарных потоков вектора **E** через все элементарные площадки поверхности. На рис. 2.2 стрелочками показаны векторы напряженности **E** на некоторых площадках dS, на которые разбивается поверхность S при численном расчете потока. Как следует из известного в курсе математики определения интеграла, в пределе $N \to \infty$ сумма потоков через площадки есть не что иное, как интеграл от нормальной компоненты напряженности (формула (2.3)) . Будучи взят по некоторой поверхности, такой интеграл называется поверхностным интегралом.

2.3. Теорема Гаусса в интегральной форме

Доказана К. Гауссом в 1844, устанавливает связь источников поля и потока напряженности через произвольную поверхность, окружающую источники. Для доказательства выведем две вспомогательных формулы.

2.3.1. **Поток от точечного заряда через произвольную окружающую его сферу**.

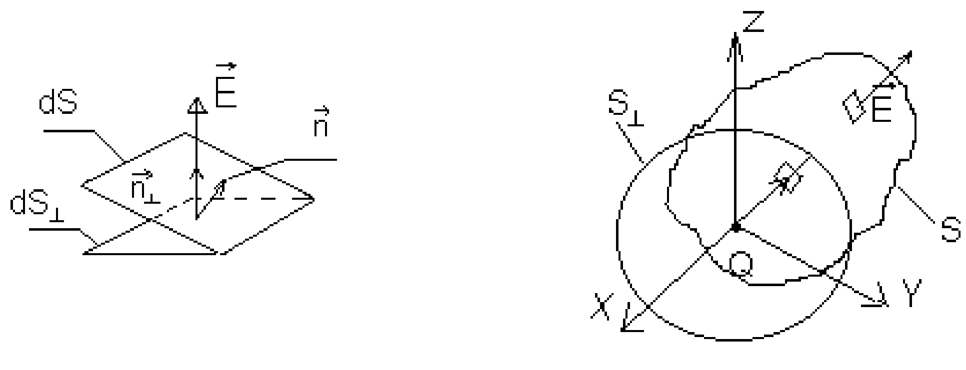
Рис. 2.3 Поток вектора **E** от точечного заряда через мысленную сферу, концентричную заряду.



Силовые линии поля точечного заряда перпендикулярны поверхности концентрической сферы. С учетом этого формула

$$\Phi = \oiint E_n dS = \frac{kQ}{r^2} \oiint_S dS = \frac{Q 4\pi r^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (2.4)$$

легко выводится из выражения для *поля точечного заряда* (1.4). Как видно, поток Φ не зависит от радиуса сферы, а зависит только от Q и ε.



(а) (б)

Рис.2.4 Иллюстрация к доказательству теоремы Гаусса для электростатического поля в вакууме: а) – поток через наклонную площадку, б) – поток через произвольную поверхность равен потоку через сферу произвольного радиуса, концентричную заряду.

2.3.2. Поток поля через площадку, наклонную к вектору E

Поток $d\Phi$ через площадку, наклонную к силовой линии (т.е. к вектору **E),** равен потоку через проекцию этой площадки на плоскость, перпендикулярную силовой линии (см. рис. 2.4).

$$d\Phi = E_n dS = d\Phi_{\perp} = EdS_{\perp}$$

Это равенство следует из определения (2.1) для $d\Phi$ и геометрической теоремы об углах с взаимно перпендикулярными сторонами. Из этого равенства, в свою очередь, следует, что поток поля точечного заряда через любую поверхность, окружающую заряд, равен потоку через сферу произвольного радиуса, концентричную заряду (см. рис. 2.4 (б)). Действительно, поток поля точечного заряда через любую площадку dS произвольной поверхности S, показанной на рис. 2.4 (б), получается таким же, как поток через показанную на этом рисунке площадку $dS_{\perp}$, расположенную на произвольной сфере. Поток поля Φ через сферу, как уже отмечалось, не зависит от ее радиуса. Поэтому поток через поверхность S (см. рис. 2.4) задается формулой (2.4). Из этого результата и принципа суперпозиции, который позволяет обобщить результат (2.4) для системы зарядов, следует *теорема Гаусса в интегральной форме:* полный поток Φ напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность, внутри которой находится как угодно распределенный (объемный, поверхностный и.т.д.) суммарный заряд Q, вычисляется по формуле

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (2.5)$$

При применении теоремы Гаусса для решения задач, необходимо помнить, что в уравнении (2.5) Q – сумма *всех* зарядов внутри мысленной поверхности, через которую вычисляется поток, в том числе, если поверхность пересекает атомы или молекулы, зарядов, принадлежащим этим атомам и молекулам.

Поток напряженности поля **E** через любую замкнутую поверхность, внутри которой полный заряд равен нулю, также равен нулю.

2.4. Теорема Гаусса в дифференциальной форме

2.4.1. Дивергенция векторного поля

Соответствующая любому векторному полю (т.е. некоторой векторной функции $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, зависящей от координат) например, электрическому полю скалярная функция, обозначаемая символом div и определяемая в декартовой системе координат *(x,y,z)* как

$$div\ \mathbf{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z}$$

называется *дивергенцией поля* $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Физический смысл дивергенции следует из формулы, доказываемой в курсе высшей математики:

$$\frac{\oint\limits_S A_n dS}{V} \xrightarrow[V \to 0]{} div\ \mathbf{A} \quad (2.6)$$

(При предельном переходе объем V и его поверхность S стягиваются в точку наблюдения, в которой вычисляется div.) Согласно (2.5), поток напряженности **E** через любую бесконечно малую сферу, внутри которой нет зарядов, - тождественный нуль. Поэтому из (2.6) следует, что в точках с нулевой плотностью зарядов (ρ=0) дивергенция **E** равна нулю. Рассмотрев поток через малую сферу V вокруг точки, в которой дивергенция напряженности ***не*** равна нулю, можно показать с помощью (2.5) и (2.6) , что в такой точке объемный заряд ***есть***, поэтому точки, в которых дивергенция **E** отлична от нуля являются источниками силовых линий.

2.4.2. Теорема Гаусса в дифференциальной форме

В курсе математики доказывается теорема Остроградского-Гаусса. Эта очень важная для физики теорема была установлена К. Гауссом в 1844 независимо от М.В. Остроградского, доказавшего ее в 1839 (работы российских ученых в то время не переводились на другие языки):

$$\oint\limits_S A_n dS = \int\limits_V div\, \mathbf{A}\, dV$$

Здесь V – произвольный объем, ограниченный поверхностью S. Применим теорему к потоку электростатического поля. С учетом теоремы Гаусса (1.13), получим:

$$\oint\limits_S E_n dS = \int\limits_V div\mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} Q = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_V \rho dV$$

Из равенства интегралов ввиду произвольности объема V следует равенство подынтегральных выражений, которое и называется теоремой Гаусса в дифференциальной форме (А. Пуассон, 1850 г.):

$$\varepsilon\varepsilon_0 div\,\mathbf{E} = \rho \quad (2.7)$$

Из тех областей пространства, в которых дивергенция **E** положительна, силовые линии **E** исходят (ρ>0), в тех областях, где div **E** <0 силовые линии заканчиваются (ρ<0) , а через те области, где div **E** = 0 силовые линии проходят, но не рождаются и не исчезают, так как в этих областях ρ=0 и зарядов нет. Поэтому теорема (2.7) позволяет, измерив распределение поля в некотором объеме пространства, восстановить распределение зарядов в нем и понять есть ли там заряды или нет.

2.5. Пример применения теоремы Гаусса.

С помощью теоремы Гаусса можно вычислить, например, поле равномерно заряженной пустотелой сферы, поле равномерно заряженной объемной сферы (шара), и т.д. Пусть сфера радиусом R заряжена равномерно по поверхности, причем заряд сферы равен Q. Так как задача сферически симметрична, то поле в любом направлении зависит только от расстояния до центра сферы. Вектор **E** направлен радиально (от центра сферы, если она положительно заряжена или к центру сферы в случае отрицательного заряда) и не зависит от углов наклона радиус-вектора относительно осей системы координат. Проведем через точку наблюдения мысленную сферу концентричную заряженной сфере. Вектор **E** ортогонален этой сфере и однороден на ней. Поэтому поток вектора **E** равен простому произведению E на площадь мысленной сферы $4\pi r^2$. По теореме Гаусса он дается формулой (2.5), если r>R и равен нулю, если r<R. В результате получаем, что поле вне заряженной сферы задается формулой (2.5), а внутри заряженной сферы оно тождественно равно нулю. В случае равномерно заряженной объемной сферы (шара) поле вне ее (его) также задается формулой (1.4), однако поле внутри не равно нулю. Для любого r мысленная сфера радиусом r, концентричная шару, содержит некоторый заряд, который равен произведению объемной плотности заряда ρ, равной отношению Q к объему шара, на объем мысленной сферы. Этот заряд и определяет поле на поверхности мысленной сферы в соответствии с теоремой Гаусса.

Модуль 3. Тема 3. Электростатическое поле как потенциальное поле.

Потенциал электрического поля. Работа сил электрического поля. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по замкнутому контуру. Понятие градиента. Связь между вектором напряженности и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности. Формулы для напряженности и потенциала точечного заряда, бесконечной равномерно заряженной прямой линии, бесконечной равномерно заряженной плоскости.

3.1. Потенциальность электростатического поля.

Электростатическое поле является потенциальным. Это утверждение может быть легко доказано. По определению потенциального поля (которые мы давали в курсе механики) работа этого поля по переносу материальной точки (в данном случае пробного заряда) из некоторой точки 1 в некоторую точку 2 не зависит от траектории его движения. Иными словами, работа при заданном потенциальном поле для данного пробного заряда полностью определяется координатами двух точек пространства, начальной и конечной.

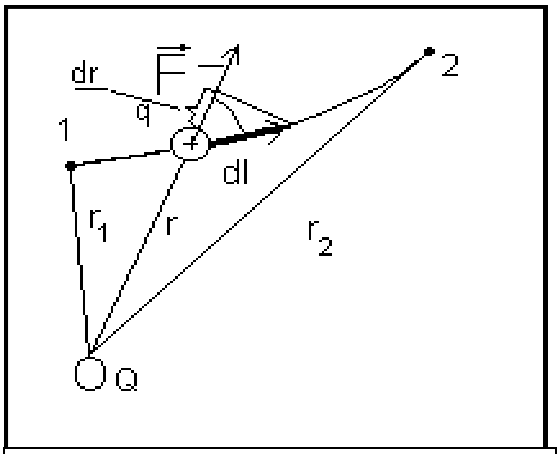


Рис. 3.1. К вычислению работы поля, созданного зарядом Q при перемещении заряда q.

Для случая, когда источником поля является точечный заряд Q это нетрудно обосновать с помощью следующих формул. Работа на элементарном отрезке траектории по известному из механики определению есть $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$. Раскрывая скалярное произведение векторов через угол α между ними (см. также рис. 3.1), получаем для элементарной работы, что она пропорциональна dr (проекции d**l** на направление радиус-вектора r):

$$dA = k\,\frac{Qq}{r^2}\,dl\cos\alpha = k\,\frac{Qq}{r^2}\,dr$$

Суммируя (интегрируя по r от r_1 до r_2) все элементарныее работы, получаем

$$A_{12} = \int_1^2 dA = k\left(\frac{Qq}{r_1} - \frac{Qq}{r_2}\right) \quad (3.1),$$

что и требовалось доказать. Работа определяется только расстояниями от источника до начальной и конечной точки траектории.

Из принципа суперпозиции следует потенциальность электростатического поля, созданного любой системой зарядов. Из формулы (3.1) следует также, что работа электростатических сил над зарядом, перемещающимся по замкнутому контуру (когда $r_1 = r_2$), равна 0:

$$A_L = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q\oint_L E_l\,dl = 0. \qquad (3.2)$$

3.2. Циркуляция векторного поля

Из формулы (3.2) следует, что интеграл по любому замкнутому контуру от проекции вектора напряженности электростатического поля на касательную к контуру тождественно равен нулю. Однако не все силовые поля подобны электростатическому и удовлетворяют уравнению типа (3.2). Для *произвольного векторного поля* вводится понятие *циркуляции* **A***(x,y,z)***.** Циркуляция вектора определяется следующим образом. В каждой точке контура l берется проекция вектора **A** на касательную к этому контуру и интегрируется вдоль всего контура:

$$C_L = \oint_L A_l\,dl$$

Для любого контура в электростатическом поле циркуляция напряженности – тождественный нуль.

3.3. Ротор векторного поля.

Ротор это еще одно понятие из математической теории векторных полей. В декартовой системе координат *(x,y,z)* он определяется как вектор, компоненты которого равны определенным комбинациям пространственных производных вектора **A.** Именно:

$$rot\ \mathbf{A} = \mathbf{i}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \mathbf{j}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \mathbf{k}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})$$

Физический смысл ротора следует из равенства, доказываемого в курсе математики:

$$\frac{\oint_L A_L dl}{S} = \frac{C_L}{S} \xrightarrow[S \to 0]{} rot_n \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Здесь ***n*** – нормаль к площадке *S*, *L* – контур, ограничивающий эту площадки, который при этом предельном переходе стягивается в точку наблюдения $\mathbf{r}$. Если ротор векторного поля в некоторой точке наблюдения не равен нулю, то в любой достаточно малой окрестности этой точки силовые линии поля образуют микроскопические замкнутые контура вокруг нее («завихряются»). Поэтому область, где ротор векторного поля отличен от нуля, называют *вихрем поля*. Скорость движения потоков жидкости или газа, рассматриваемая как функция координат, является наглядным примером векторного поля. Турбулентности в жидкости или газе образуются именно вокруг точек, в которых отличен от нуля ротор скорости потока жидкости (газа). Изображение поля с помощью силовых линий в области пространства, где ротор отличен от нуля (точно так же, как и в точках с ненулевой дивергенцией), невозможно. Ротор электростатического поля любых источников тождественно равен нулю во всем пространстве, как равна нулю и циркуляция электростатического поля. Поэтому электростатическое поле, как и гравитационное, - это относительно простые силовые поля.

3.4. Градиент скалярной функции координат.

Понятие градиента уже вводилось в курсе механики. Напомним его. Градиент функции, зависящей от координат *(x,y,z)* - это вектор, декартовы компоненты которого являются пространственными производными функции *f :*

$$grad\ \ f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Пусть $\mathbf{A} = grad\ f(\mathbf{r})$. Можно показать, что тогда ротор $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ - тождественный нуль. Следовательно, если, ротор $\mathbf{E}$ - тождественный нуль, значит существует такая функция координат *U*, что $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -grad\ U(\mathbf{r})$.

3.5. Потенциал электростатического поля, Эквипотенциальные поверхности.

Итак, напряженность электростатического поля – (с точностью до знака) может быть истолкована как градиент некоторой функции координат, называемой *потенциалом* электростатического поля $U(\mathbf{r})$.

$$\mathbf{E} = -grad\, U \quad (3.3)$$

Используя определение напряженности электростатического поля (1.3) и формулу связи между силой и потенциальной энергией, известную из курса механики:

$$\mathbf{F} = -grad\ W$$

(здесь W – потенциальная энергия заряда q в данной точке), из (3.3) получим, что потенциал поля в данной точке наблюдения численно равен потенциальной энергии пробного заряда, помещаемого в данную точку, отнесенной к величине этого заряда:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{W(\mathbf{r})}{q} \quad (3.4)$$

Потенциальная энергия электростатического поля, как и энергия поля сил тяготения, определяется с точностью до произвольной постоянной, которую можно зафиксировать выбором точки нулевого уровня для *W*. Как правило, потенциальная энергия электростатического поля полагается равной нулю в *бесконечно удаленной точке*.

Рассмотрим в пространстве, где имеется электростатическое поле, мысленную поверхность, перпендикулярную его силовым линиям. На этой поверхности, очевидно, касательная к ней компонента **E** равна нулю. Следовательно потенциалы всех точек этой поверхности одинаковы. Такие поверхности называются *эквипотенциальными.* Зная распределение силовых линий, распределение эквипотенциальных поверхностей представить нетрудно. Например, эквипотенциальные поверхности точечного заряда или равномерно заряженной сферы суть концентрические сферы. Эквипотенциальные поверхности равномерно заряженной нити – концентрические цилиндры. У заряженной плоскости это все плоскости, параллельные ей.

Из формулы (3.3) путем интегрирования левой и правой части нетрудно получить формулу:связи разности потенциалов с напряженностью на участке между точками 1 и 2:

$$U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) = \int_1^2 E_l\, dl \quad (3.5)$$

В формуле (3.5) интегрирование ведется по любой кривой *l,* соединяющей точки 1 и 2. Однако, в этой формуле можно обойтись интегрированием модуля **E** вдоль силовой линии. Разность потенциалов между точками 1 и 2 равна разности потенциалов эквипотенциальных поверхностей, которым принадлежат эти точки. Чтобы найти разность потенциалов между двумя точками, достаточно проинтегрировать модуль напряженности электростатического поля по любой силовой линии между эквипотенциальными поверхностями, которым принадлежат эти две точки (на силовой линии $E_l = E$).

В заключение параграфа приведем формулу для потенциала поля точечного заряда Q, которая получается подстановкой формулы (1.4) в (3.5). Удаляя точку 2 на бесконечное расстояние от точечного заряда, где потенциал его поля равен нулю, и вычислив первообразную от выражения (1.4), получаем, что формула для потенциала точки, отстоящей от точечного источника на расстояние r, имеет вид:

$$U(r) = \int_r^\infty E_r dr = k_e Q \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = k_e \frac{Q}{r} \quad (3.6)$$

3.6. Поля и потенциалы равномерно заряженной нити и плоскости.

Формулы для напряженности полей равномерно заряженной нити и равномерно заряженной плоскости выводятся с помощью теоремы Гаусса. В случае нити в качестве мысленной поверхности, через которую вычисляется поток вектора **E**, выбирается концентричный нити цилиндр единичной длины с произвольным радиусом r. Вектор **E** очевидно направлен радиально относительно оси заряженной нити. Для иллюстрации можно воспользоваться рис. 1.7, считая, что темный кружок есть сечение заряженной нити (положительно заряженной слева и отрицательно заряженной справа). На поверхности цилиндра модуль вектора **E** одинаков, так как не зависит от угла, образованного радиус-вектором с осями системы координат (вследствие азимутальной симметрии задачи). Кроме того, в соответствие с формулой (2.1), поток вектора **E** через торцы такого цилиндра равен нулю, так как вектор **E** в любой точке на этих торцах лежит в плоскости самих торцов и, следовательно, перпендикулярен нормали к их поверхности. Поэтому поток вектора **E** равен просто произведению E(r) на площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi r \cdot 1 = 2\pi r$. Для потока вектора **E** имеем теорему Гаусса, т.е. формулу (2.5), в которой заряд внутри мысленного цилиндра единичной длины равен произведению линейной плотности заряда на нити τ на единицу, т.е. равен τ. В итоге

$$E(r) = E_r(r) = \frac{\tau}{\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon r} \quad (3.7)$$

Эта формула справедлива вне самой заряженной нити. Аналогично случаю точечного заряда, т.е. вычисляя первообразную от функции, заданной формулой (3.7), мы находим потенциал поля заряженной нити в виде:

$$U(r) = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \ln r + C$$

Здесь С – неопределенная постоянная, которую можно найти, наложив условие обращения потенциала в ноль на оси нити или на бесконечном расстоянии от нее. Из интуиции следует, что более правильный подход предполагает потенциал нити равным нулю на оси нити. Это соответствует азимутальной симметрии задачи, при том что поле **E** очевидно равно нулю на оси нити. Правда при этом получается не равный нулю (а наоборот, бесконечный) потенциал на бесконечном расстоянии от заряженной нити. Но это разумный результат, так как заряженное тело само бесконечно и при ненулевом τ содержит бесконечный заряд. Для того, чтобы найти С при таком подходе необходимо решить задачу о поле внутри заряженной нити. Мы этого делать не будем, приведя лишь окончательный результат

$$U(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\ln\frac{r}{R} + \frac{1}{2}\right) \quad (3.8)$$

Поле равномерно заряженной плоскости находится с помощью теоремы Гаусса, выбирая мысленную поверхность в виде цилиндра с поперечным сечением, равным единице, и какой угодно длины, которую мы обозначим через L. Мысленный цилиндр надо расположить перпендикулярно заряженной плоскости (выберем плоскость ОХ системы координат совпадающей с заряженной плоскостью), так чтобы она проходила через его середину. Тогда внутри этого цилиндра будет находиться заряд Q, равный произведению поверхностной плотности заряда σ на площадь его поперечного сечения, которая равна 1, т.е. Q= σ.

Заряженная плоскость есть плоскость симметрии, так что векторы (и силовые линии) напряженности направлены перпендикулярно плоскости (от нее, если $\sigma>0$ или к ней, если $\sigma<0$), иными словами вдоль оси y. Так как векторы **E** направлены вдоль боковой поверхности цилиндра, поток **E** через его боковую поверхность, в соответствие с формулой (3.1), равен нулю. Потоки через оба торца цилиндра одинаковы и равны (для положительно заряженной плоскости)

$$\Phi_T = E_y\left(y = \frac{L}{2}\right)\cdot 1 = -E_y\left(y = -\frac{L}{2}\right)\cdot 1 = \left|E_y\left(y = \frac{L}{2}\right)\right|$$

Это выражение следует умножить на два (это будет полный поток через весь цилиндр) и приравнять правой части формулы (3.5) с учетом Q= σ. Так как L – произвольная величина, то на любом расстоянии y от плоскости ее поле однородно и определяется выражением

$$E_y = \pm\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \quad (3.9)$$

Знак плюс соответствует области $y>0$, минус соответствует области $y<0$. Для отрицательно заряженной плоскости знаки полей противоположны.

Потенциал поля заряженной плоскости получается элементарным интегрированием и равен

$$U = -\frac{\sigma\,|\,y\,|}{2\varepsilon_0\varepsilon} \quad (3.10)$$

Модуль 3. Тема 4. <u>Электрические диполи. Поле в диэлектрике</u>

Полярные и неполярные молекулы. Индуцированный дипольный момент, поляризация. Полярные и неполярные диэлектрики. Вращающий момент, действующий на электрический диполь в электростатическом поле, сила, действующая на диполь в неоднородном поле, поля диполя, энергия диполя. Свободные и связанные заряды, поляризованность вещества. Понятие о микроскопическом и макроскопическом электрических полях. Проводники и диэлектрики. Диэлектрическая восприимчивость. Граничные условия на поверхности диэлектрической пластины. Вектор электрического смещения (электрической индукции). Диэлектрическая проницаемость и ее единицы измерения.

4.1. Поляризация. Полярные и неполярные молекулы, полярные и неполярные диэлектрики.

Как уже отмечалось модель электрического диполя, показанного на рис. 1.8 (а) может быть сопоставлена реальным объектам, например, поляризованному атому. Чтобы понять, как такой атом моделируется диполем, рассмотрим неполяризованный нейтральный атом с атомным числом N (N также порядковый номер в таблице элементов Менделеева). Как известно, атом содержит сферическое ядро и электроны, обращающиеся вокруг этого ядра. Ядро атома может быть рассмотрено (см. рис. 4.1 (а)) как равномерно заряженный положительный шар с распределенным по его объему зарядом $N\,|e|$ ($|e|$ - заряд протона). Когда атом находится в своем обычном (т.е. в основном или, иначе, невозбужденном) состоянии, то заряд электронов как бы размазывается по орбите, и электрон не излучает (не испускает электромагнитной энергии). Поэтому окружающие ядро N электронов могут быть рассмотрены как сферические оболочки с распределенными по их поверхности статическим зарядом. Заряд каждой оболочки равен e. На рис. 4.1 показан случай атома водорода, когда электронная оболочка одна (N=1), но для понимания поляризации атома число N не принципиально. В отсутствие электрического поля эта зарядовая система сферически симметрична. Как следует из теоремы Гаусса, поле равномерно заряженного шара, содержащего произвольный заряд Q (или сферы, несущей заряд Q) равно полю точечного заряда Q, расположенногов центре шара (или сферы). Поэтому с точки зрения создаваемого ими электростатического поля, ядро и электрон эквивалентны, соответственно, положительному и отрицательному точечному зарядам Ne и $-Ne$, расположенным в центре атома. Очевидно поле симметричного (*неполяризованного*) атома вне его самого равно нулю. Этот результат соответствует нулевому дипольному моменту атома, т.е. диполю (см рис. 1.8) с l=0. Вещество, молекулы которого состоят из таких симметричных (неполяризованных) и электрически нейтральных атомов, называется *неполярным диэлектриком.* Таковы молекулы H_2, N_2, O_2, CCl_4 и др.

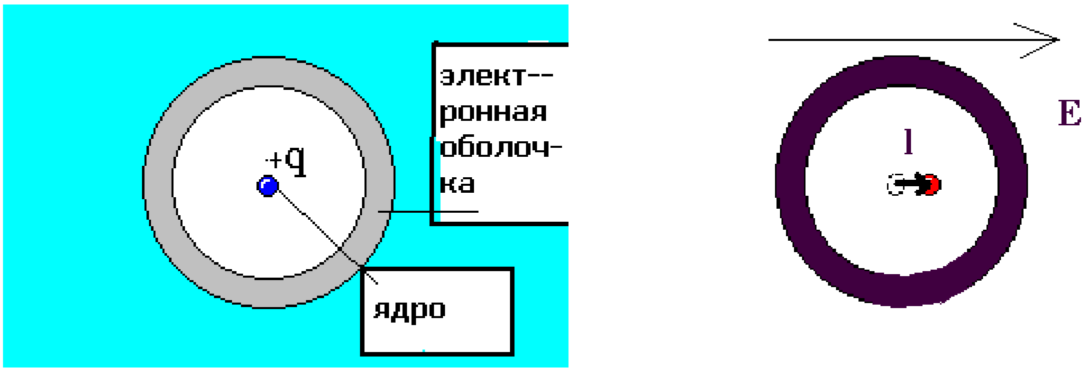


Рис. 4.1 а) Неполяризованный атом и б) Поляризованный атом.

Пусть теперь атом помещен в электрическое поле напряженностью **E**, (см. рис. 4(б)), тогда оно смещает ядро и электронное облако в противоположные стороны до тех пор, пока сила притяжения ядра и электрона не уравновесит силу внешнего поля, которая по модулю равна $F= e\ E.$ При этом центр ядра оказывается смещен относительно центра электронного облака на некоторый вектор l. И ядро и электронное облако, ввиду их сферической симметрии, эквивалентны точечным зарядам *e,* размещенным в их центрах. Следовательно, такой *поляризованный* атом эквивалентен диполю, изображенному на рис. 1.8 с *индуцированным* (наведенным внешним полем) дипольным моментом p=el. Из опыта следует, что для большинства веществ при не слишком больших полях величина l взаимного смещения ядра и электроннй оболочки прямо пропорциональна **E**.

Физический процесс пространственного разделения зарядов под действием внешнего электрического поля называется *поляризацией.* В результате поляризации вещество из неполярных атомов и молекул (*неполярный диэлектрик*) оказывается состоящим из диполей, которые создают (в ответ на приложенное к ним внешнее поле) собственное поле-*поле поляризации.* В соответствии с вышесказанным, чем больше внешнее поле **E**, тем больше дипольный момент образца среды (сумма индуцированных дипольных моментов всех его молекул), и тем больше поле поляризации. Поле поляризации у всех природных веществ (кроме плазмы) направлено против внешнего поля. Что касается Размер атомного ядра на один-два порядка меньше внешнего радиуса электронной оболочки. Хотя величина смещения l для атома водорода в поле E=30 кВ/см оказывается примерно на 20% больше радиуса ядра, оно составляет всего 0.01% радиуса атома. Дипольные моменты атомов, поляризованных во внешнем поле, очень малы, и поле поляризации среды заметна лишь в случае достаточно высокой концентрации атомов и молекул. Поляризация газов, т.е. сред со сравнительно малой концентрацией молекул, существенной роли не играет. Можно догадаться, что именно поэтому диэлектрическая проницаемость газов весьма мало отличается от ε_0. Поляризация твердых тел и жидкостей, даже образованных неполярными молекулами существенно сильнее, и их диэлектрическая проницаемость, обычно, в два раза и более превышает ε_0.

Существуют вещества, у которых атомы поляризованы изначально (в отсутствие внешнего поля). Существует и вещества, молекулы которых состоят из *ионов* (атомов, у которых суммарный заряд не равен нулю из-за того, что число электронов, обращающихся вокруг ядра, не равно атомному числу N, т.е. числу протонов в ядре). Вещества первого типа относятся к так называемым *полярным диэлектрикам*. Полярные диэлектрики это вещества, состоящие из микрочастиц (молекул или микрокристаллов), имеющих отличный от нуля дипольный момент даже в отсутствие внешнего поля. Дипольные моменты полярных молекул гораздо больше тех дипольных моментов, которые возникают у молекул и атомов неполярных веществ, при их поляризации внешним полем. Полярными диэлектриками являются также жидкие и аморфные вещества, молекулы которых состоят из положительных и отрицательных ионов, например, вода. Кристаллические же вещества, состоящие из положительных и отрицательных ионов, могут быть как полярными, так и неполярными диэлектриками. Если центры положительных и отрицательных зарядов в каждой ячейке ионной кристаллической решетки пространственно совпадают, такой диэлектрик – неполярный, если нет – полярный.

Ниже даны определения дипольного момента как для системы из N точечных зарядов (модель ячейки кристалла), так и для системы с пространственно распределенным объемным зарядом (модель поляризованного атома с объемом V):

$$\mathbf{p} = \sum_{n=1}^{N} q_n \mathbf{r}_n \qquad \mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV$$

Здесь $\mathbf{r}_n$ - радиус-векторы точечных зарядов (ионов ячейки кристалла), ρ - объемная плотность заряда, как функция радиус-вектора. В первом случае радиус-вектор отсчитывается обычно от центра ячейки кристаллической решетки, во втором случае - от геометрического центра поляризованного атома (молекулы). Однако можно показать, что результат (величина и направление дипольного момента) не зависит от выбора точки отсчета радиус-вектора $\mathbf{r}$, и его можно проводить и не из центра атома.

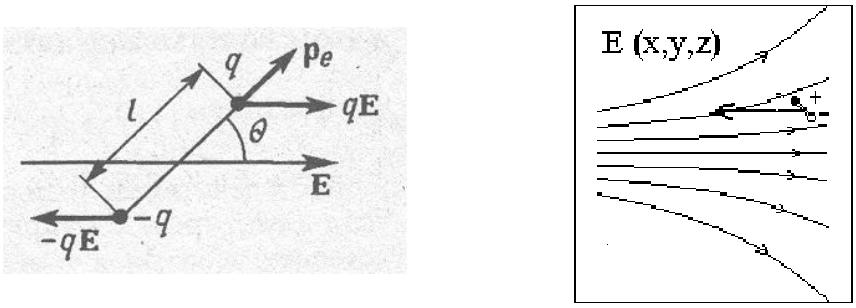
4.2. Действие приложенного электростатического поля на диполь

Как правило, электростатические силы, связывающие заряды («концы») диполя гораздо больше, чем силы, действующие на них со стороны внешнего поля. Поэтому внешнее поле, приложенное к полярному диэлектрику, как правило, не может разорвать его диполи (т.е. произвести ионизацию полярных молекул или кристаллической среды). Более того, оно не может и существенно растянуть диполи (увеличить их дипольный момент). Но это не значит, что внешнее поле никак не действует на полярный диэлектрик. Оно разворачивает его диполи, ориентируя их вдоль вектора **E**. В однородном внешнем поле **E** на концы диполя (точечные заряды ±q) действуют силы, численно равные *Eq*. Очевидно, что эта пара сил, которые направлены в разные стороны, поворачивают диполь до тех пор, пока вектор дипольного момента не установится вдоль силовой линии поля. Когда диполь ориентирован вдоль **E** , момент этой пары сил равен нулю, так как очевидно, что нулю равно плечо этого момента (рис. 4.2 (а)). Иными словами, если диполь ориентирован изначально под некоторым ненулевым углом к полю, то на него действует вращающий момент **M,** создаваемый парой сил $\mathbf{F} = \pm q\mathbf{E}$:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}, \mathbf{E}] \quad (4.1)$$

Когда диполь оказывается ориентирован вдоль **E**, это векторное произведение равно нулю, и вращающего момента не возникает. В этом и состоитдейтсвие электрического поля на полярный диэлектрик. Большая часть полярных диэлектриков имеют ненулевой дипольный момент только на уровне микрочастиц. Достаточно большой образец такого диэлектрика имеет пренебрежимо малый дипольный момент, потому что дипольные моменты его микрочастиц (молекул или микрокристаллов) ориентированы хаотически из-за их теплового движения (вспомним, что тепловое движение многоатомных молекул не только поступательное, но и вращательное). Исключения составляют только монокристаллические полярные диэлектрики, которые называются электретами. Такие среды в данном курсе не рассматриваются. При помещении обычного полярного диэлектрика в электрическое поле, часть его микрочастиц ориентируется своими дипольными моментами вдоль **E.** Это те частицы, у которых хаотическое (тепловое) вращение является более медленным, т.е. по сравнению с энергией электрическом поля низкоэнергетичным. Чем больше **E**, тем больший процент частиц выстраивается по полю. Поэтому дипольный момент образца полярного диэлектрика, например эбонитовой палочки, с ростом напряженности поля растет.

Можно показать, что в неоднородном (например, вдоль оси x) поле на диполь в целом действует сила, пропорциональная градиенту напряженности $F_x = \mathbf{p} \cdot grad\, E_x$, где E_x - проекция вектора **E** на ось OX. Аналогичные формулы можно записать для y и z – компонент **E**. В итоге, диполь в неоднородном электростатическом поле втягивается в область более сильного поля и ориентируется вдоль силовых линий этого поля (рис. 4.2 (б)). Именно это и происходит с твердым образцом полярного диэлектрика, подвешенным на нити, при включении электростатического поля, которое больше с одной стороны образца, чем с другой.



(а) (б)

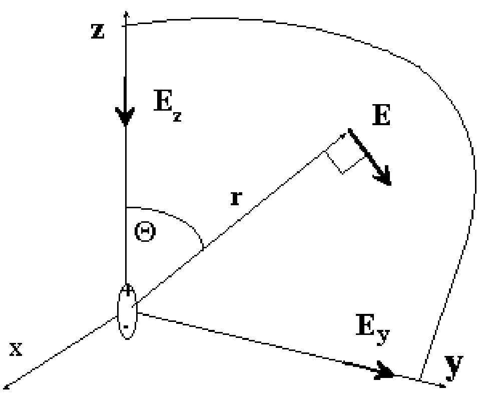
Рис. 4.2 а) Пара сил, создающих крутящий момент для диполя во внешнем поле и б) диполь, втягивающийся в неоднородное поле.

4.3 Электростатическое поле диполя и энергия диполя

Поле диполя проще всего выразить через его потенциал. Направим ось *z* вдоль диполя с дипольным моментом *p=ql* и поместим начало координат в его центр. Тогда потенциал диполя как сумма потенциалов его концов есть:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = k_e q\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2+(y-l/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2+(y+l/2)^2}}\right) \quad (4.2)$$

Рассмотрим потенциал и поле диполя на расстояниях $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ от его центра, весьма больших по сравнению с *l*. Вынося в формуле (4.2) величину *1/r* за скобку, воспользуемся приближенным равенством, справедливым для любого малого числа *a*<<1 и следующим из разложения в ряд Тейлора $\frac{1}{\sqrt{1+a}} \approx 1-a/2$, и получим $\varphi(\mathbf{r}) \approx k_e ql \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$. Или в векторной форме $\varphi(\mathbf{r}) \approx k_e \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/r^3$. Из *формулы связи потенциала и напряженности* нетрудно получить: $E_y \approx 3k_e p \sin\Theta\cos\Theta/r^3$ и $E_z \approx k_e p(3\cos^2\Theta-1)/r^3$ (см. рис. 4.3). Для абсолютной величины напряженности имеем отсюда



$$E = k_e p \frac{\sqrt{3\cos^2\Theta+1}}{r^3} \quad (4.3)$$

Рис. 4.3. Направление вектора дальнего поля диполя.

Вектор поля ортогонален радиус-вектору **r**. Поле диполя азимутально симметрично (не зависит от полярного угла в плоскости xy). Отметим, что именно дальнее поле колеблющегося диполя в электродинамике называется *дипольным полем*.

Жесткий диполь в электростатическом поле обладает потенциальной энергией, которая по модулю равна скалярному произведению дипольного момента на напряженность:

$$W = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \quad (4.4)$$

В положении равновесия потенциальная энергия минимальна $W = -pE$.

4.4. Особенности поляризации диэлектриков и проводников.

4.4.1. Поляризация как процесс электростатической индукции.

Явление поляризации электростатическим полем макроскопических тел иногда называют явлением электростатической индукции. При электростатической индукции на одной стороне поверхности тела образуются положительные заряды, на другой стороне отрицательные. В диэлектрических телах электростатическая индукция связана с тем, что диполи выстраиваются вдоль приложенного поля, причем с одной стороны тела оказываются отрицательные концы диполей, а с другой – положительные. В неполярных диэлектриках внешнее поле само формирует диполи, направленные вдоль него. В полярных диэлектриках диполи стремятся ориентироваться вдоль вектора **E,** благодаря действию вращающего момента (этот процесс, как уже было отмечено, конкурирует с тепловым движением).

В металлах, ионы кристаллической решетки окружены *свободными зарядами* (электронами проводимости), которые могут перемещаться под действием поля на большие (в микроскопическом смысле) расстояния. Они накапливаются с той стороны металлического тела, куда «входит» вектор напряженности приложенного поля, а та сторона, откуда этот вектор «выходит», оказывается «обедненной электронами», и потому заряжена положительно. Процесс поляризации проводящего тела продолжается до тех пор, пока поле поляризации **E’’** (направленное против приложенного поля **E’**) полностью не скомпенсирует **E’** внутри проводника. В этот момент сила, действующая на электроны проводимости $\mathbf{F} = e\mathbf{E} = e(\mathbf{E}' + \mathbf{E}'')$, уменьшается до нуля, и процесс поляризации прекращается. В *установившемся режиме* внутри проводника электростатическое поле отсутствует ($\mathbf{E}=0$), а также равна нулю плотность заряда. Избыточные заряды сосредоточены с двух сторон на поверхности проводника. На поверхности равна нулю касательная к ней компонента **E** (иначе электроны продолжали бы перемещаться вдоль поверхности). Длительность процесса поляризации проводника, как правило, не превышает одной микросекунды.

Из сказанного следует, что заряды, образующиеся при электростатической индукции на противоположных сторонах проводящего образца, являются свободными. В случае диэлектрика эти заряды являются связанными. В обоих случаях эти заряды называются *индуцированными*.

4.4.2. Проводник в электростатическом поле

На поверхности проводящего тела напряженность электростатического поля направлена нормально к поверхности, поскольку касательная компонента вектора **E** равна нулю.

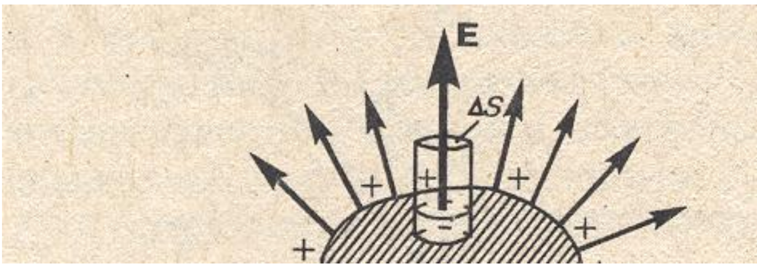


Рис. 4.4. Поле **E** вблизи проводящего тела.

Выразим величину напряженности через поверхностную плотность индуцированного заряда σ. Мысленно выделим малый цилиндрик, расположенный как показано на рис. 6 (высота цилиндра нормальна к поверхности проводника), и применим к поверхности этого цилиндрика *теорему Гаусса*. Поток поля через боковую поверхность цилиндра равен нулю, т.к. нормальная к этой поверхности компонента напряженности отсутствует. Поток поля через то основание цилиндра, которое находится внутри проводника – тождественный нуль. Следовательно, полный поток поля dФ через поверхность цилиндра равен потоку через его верхнее основание ΔS, причем поле на верхнем основании цилиндра можно считать таким же, как на поверхности проводника ввиду малости высоты цилиндра. Таким образом dФ$= E_n \Delta S = dQ / \varepsilon_0 = \sigma \Delta S / \varepsilon_0$, где dQ – заряд, на участке поверхности проводника, ограниченной боковой поверхностью цилиндра (площадь этого участка равна ΔS). В итоге имеем *граничные условия на поверхности проводника, находящегося в вакууме или воздухе:*

$$E_\tau = 0, \quad E_n = \sigma / \varepsilon_0 \quad (4.5)$$

Если проводник находится в диэлектрике, граничное условие приобретает вид:

$$E_\tau = 0, \quad E_n = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon \quad (4.6)$$

Потенциал проводящего тела во всех его точках одинаков. Это же относится и к поверхности тела, т.е. поверхность проводника в электростатическом поле *эквипотенциальна.* Картина силовых линий поля вблизи проводника до начала процесса электростатической индукции (а) и в установившемся режиме (б) показана на рис. 4.5.

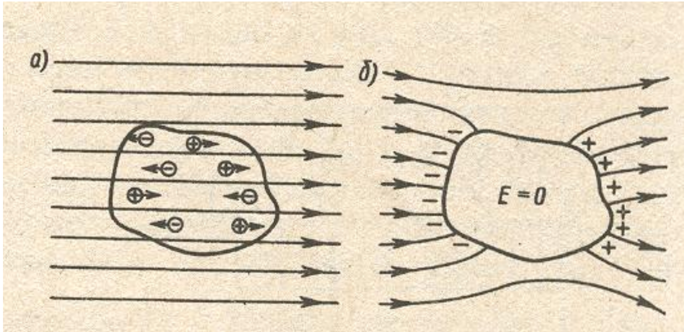


Рис. 4.5. Силовые линии в начале процесса электростатической индукции в образце проводника и по завершении этого процесса.

4.4.3 Диэлектрик в электростатическом поле. Поляризованность и диэлектрическая восприимчивость. Макроскопическое и микроскопическое поля.

При помещении неполярного диэлектрика во внешнее электростатическое поле его атомы и молекулы или ячейки кристаллической решетки, приобретая вследствие *поляризации* дипольные моменты, становятся *элементарными диполями*, и в итоге каждый малый объем dV (малый по сравнению с объемом диэлектрического тела, но большой по сравнению с объемом молекулы, атома или элементарной ячейки кристалла) приобретает дипольный момент

$$d\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \qquad (4.7)$$

где N – число элементарных диполей ($\mathbf{p}_i$ - дипольные моменты молекул) в объеме dV. Такое понятие малого объема мы уже вводили при определении объемного заряда. Число N пропорционально dV ($N=ndV$, где n –

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} \quad [Кл/м^2]$$

концентрация молекул). Поэтому векторная величина, называемая *поляризованностью (*численно равная дипольному моменту единичного объема диэлектрической среды) не зависит от dV:

Для неполярных диэлектриков зависимость поляризованности от напряженности электрического поля линейна (см. то, что сказано выше о *поляризации атома*):

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E} \quad (4.8)$$

Под $\mathbf{E}$ в этом выражении подразумевается напряженность так называемого *усредненного* (иначе, *макроскопического)* поля, изменением которого в пределах объема dV можно пренебречь. Множитель κ в формуле (4.8) называется *диэлектрической восприимчивостью.* Истинное электрическое поле в диэлектрической среде (называемое иначе *микроскопическим полем*) существенно меняется в масштабе порядка размеров элементарного диполя, т.е. в масштабе одной молекулы. Мелкомасштабные изменения микроскопического поля, таким образом, являются следствием пространственно неоднородной структуры вещества на молекулярном уровне. *Усредненное поле поляризации* $\mathbf{E}'$ есть результат сглаживания (срезания) флуктуаций собственного поля поляризации (т.е. поля всех диполей). Макроскопическое поле есть векторная сумма $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$. Для всех сред кроме плазмы $E < E_0$. Плазма в электростатическом поле является проводником, а не диэлектриком, и конечный объем плазмы поляризуется как проводящее тело. Если же речь идет о переменных полях в плазме возникают собственные колебания, которые и приводят к уникальному результату, такой поляризации, что $E > E_0$. В данном курсе мы не изучаем процессов в плазме.

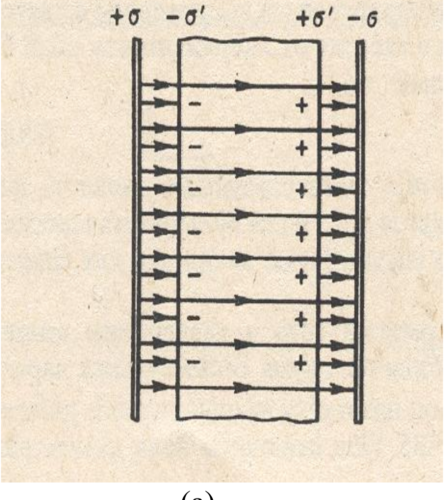
В полярных диэлектриках, несмотря на иной физический механизм поляризации, чем в неполярных диэлектриках, результат (4.8) также имеет место, и причина этого уже была объяснена выше. Поле поляризации $\mathbf{E}'$ оказывается отличным от нуля тогда и только тогда, когда на диэлектрик действует внешнее поле $\mathbf{E}_0$, которое ориентирует его диполи.

Приведем более подробное качественное обоснование формулы (4.8) для случая полярных диэлектриков с малой плотностью (например, дыма). В средах с малой плотностью имеют смысл известные из курса молекулярной физики понятия длины и времени свободного пробега молекул. Молекулы, кинетическая энергия которых велика по сравнению с энергией электрического поля, за время свободного пробега не успевают повернуться вдоль **E** и остаются ориентированы хаотически, и потому их суммарный вклад в $d\mathbf{p}$ (см. формулу (4.7)) равен нулю. Чем больше напряженность **E**, тем меньше таких молекул, и тем большее число молекул в единичном объеме успевают за время свободного пробега, сориентироваться своими дипольными моментами вдоль поля. Для полярного диэлектрика число N в формуле (4.7) – число диполей в объеме dV, выстроенных вдоль поля, (т.е. дающих вклад в $d\mathbf{p}$). Оно оказывается пропорционально напряженности, а значит поляризованность **P** полярного диэлектрика тоже пропорциональна **E** (в итоге, все три величины **P**, $\mathbf{E}_0$ и **E** пропорциональны друг другу**)**. Диэлектрическая восприимчивость κ полярных диэлектриков, очевидно, зависит от температуры. Чем больше температура, тем меньше длина свободного пробега молекул, и тем меньший процент молекул успевает выстраиваться вдоль вектора **E**.

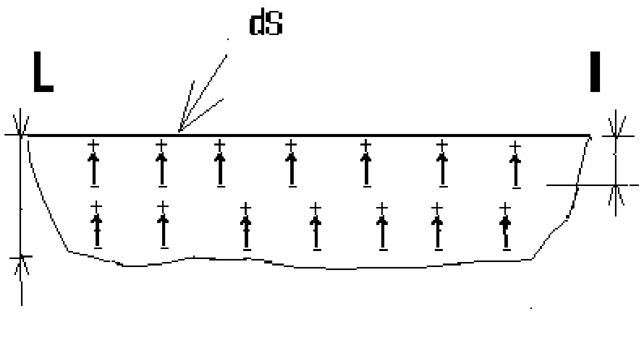
В очень больших полях при достаточно низких температурах может оказаться так, что все диполи полярного диэлектрика оказываются ориентированными вдоль поля, и дальнейшее увеличение напряженности не вызывает роста поляризованности. Это явление называется *насыщением поляризации*. Для неполярных диэлектриков (и большинства полярных диэлектриков) насыщение недостижимо, так как по мере увеличения напряженности раньше него наступает *ионизация* и, в итоге, разрушение диэлектрика. Существуют два особых вида диэлектриков – *сегнетоэлектрики и ферроэлектрики,* – для которых явление насыщения поляризации особенно ярко выражено. Формула (4.8) перестает выполняться для этих сред при довольно больших, но часто встречающихся на практике значениях модуля напряженности E. Однако при больших температурах, а именно, выше так называемой температуры Кюри, сегнетоэлектрические и ферроэлектрические свойства исчезают. Процесс превращения сегнетоэлектрика в обычный диэлектрик при превышении температуры Кюри происходит скачкообразно. Это обратимый процесс, т.е. при понижении температуры сегнетоэлектрические свойства восстанавливаются.

4.5. Связанные заряды на сторонах диэлектрической пластины. Вектор электрического смещения (электрической индукции).

Для установления количественных закономерностей поля в диэлектрике внесем в поле плоского конденсатора пластинку из однородного диэлектрика (см. рис. 4.6). В результате поляризации на правой грани диэлектрика будут находиться положительные концы элементарных диполей, а на левой – отрицательные. Внутри поляризованного диэлектрика положительные и отрицательные заряды на концах диполей чередуются на характерном расстоянии порядка размера молекулы, и поэтому в среднем заряд элементарного объема dV внутри диэлектрика равен нулю, а значит в глубине диэлектрика равна нулю объемная плотность заряда ρ. На правой и левой гранях, однако, находятся заряды с поверхностной плотностью $+\sigma'$ и $-\sigma'$. Заряды, появляющиеся вследствие поляризации диэлектрика на его поверхности, являются *связанными,* так как они находятся внутри молекул, а



(а)



(б)

Рис.4.6. а) – Диэлектрическая пластина в плоском конденсаторе. б) – Выделенный объем вблизи границы раздела диэлектрик- вакуум, опирающийся на площадку dS. Высота выделенного объема - L, характерный размер диполя - *l*.

не являются относительно свободными, как электроны проводимости в металле. Связанные заряды на сторонах диэлектрической пластины являются полным аналогом зарядов на обкладках плоского конденсатора. Именно связанные заряды создают усредненное поле поляризации **E**', которое, направлено встречно полю $\mathbf{E}_0$ (рис. 4.6 (а)). Для этого поля по аналогии с формулой для поля плоского конденсатора имеем

$$E' = \sigma' / \varepsilon_0 \qquad (4.9)$$

Выделим примыкающий к поверхности объем с некоторой площадью основания dS и некоторой высотой L (L должна быть существенно больше длины диполя l, как это показано на рис. 4.6 (б)). Поляризованность диэлектрика численно равна $P=Np/dV=Nql/LdS,$ где N – число диполей в объеме $dV=LdS$ (на рисунке N=14), а q – заряд одного из концов диполя. Поскольку $N=nLdS,$ где n – концентрация диполей (т.е. их число в единичном объеме), то $P=nql$. С другой стороны заряд площадки $dQ=\sigma' dS$ равен Mq, где M – число приповерхностных диполей в объеме $dV,$ т.е. диполей, упирающихся своими концами в поверхность диэлектрика (на рисунке M=7), Это число равно произведению концентрации диполей на объем $dv=ldS$, занятый приповерхностными диполями: $M=nldS$. И для σ' и для P получается одинаковый результат $\sigma' = P = nlq.$ Этот результат дает *вспомогательное граничное условие* для поверхности раздела *диэлектрик-вакуум:*

$$\sigma' = P_n \qquad (4.10)$$

Индекс n в уравнении (4.10) означает нормальную к поверхности компоненту вектора поляризованности (нормаль направлена наружу от диэлектрика). Вспомогательное граничное условие (4.10) справедливо и при наклонном направлении векторов поля относительно поверхности. В нашем примере **P,** как и **E**, не имеет других компонент, но в общем случае это не так.

Величина макроскопического поля численно равна разности $E_0 - E'$. Подставляя в это соотношение формулы (4.8-4.10), получаем

$$E = \frac{E_0}{1+\kappa} \qquad (4.11)$$

Отношение поля в данной точке диэлектрической среды к тому полю, которое было бы, если диэлектрик убрать, равное, согласно (4.11), величине (1+к), является по определению *диэлектрической проницаемостью среды*. Это определение согласуется с определением ε, вытекающим из закону

Кулона (1.1). Так что имеем равенство, связывающее диэлектрические проницаемость и восприимчивость:

$$\varepsilon = 1 + \kappa \quad (4.12)$$

Теперь введем новую векторную величину, определив ее следующей формулой:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.13)$$

Она называется *диэлектрическом смещением (*иначе*, диэлектрической индукцией).*

В нашем примере с диэлектрической пластиной в однородном внешнем поле (рис. 4.6 (а)) вектор $\mathbf{D}$ внутри диэлектрика с точностью до множителя ε_0 оказывается равным приложенному полю $\mathbf{E}_0$ (также, как и снаружи диэлектрика). Это очевидным образом следует из формул (4.8) и (4.13):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E} \qquad (4.14)$$

Поэтому $\mathbf{D}$ как векторная функция координат непрерывна на границах диэлектрической пластины, тогда как $\mathbf{E}$ скачком изменяется при переходе через поверхность диэлектрика от величины $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ вне его до величины, определяемой формулой (4.14) внутри него. В общем случае, когда поле наклонно к поверхности, сказанное справедливо для нормальных компонент $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$. Иными словами, внутри диэлектрической среды нормальная к ее границе компонента **E** уменьшается ровно в ε раз по сравнению с нормальной компонентой **E**. снаружи диэлектрика. Физической причиной для этого скачка является наличие связанных зарядов на границах диэлектрика. Тангенциальная, т.е. касательная к поверхности, компонента напряженности (далее будет снабжать эту компоненту индексом τ) не испытывает скачка на границе диэлектрика. Дело в том, что тангенциальное направленное поле разворачивает при поверхностные диполи вдоль поверхности. Оба конца (положительный и отрицательный) каждого диполя лежат на поверхности, и связанный заряд единичной площадки поверхности равен нулю. Справедливо и обратное: связанные заряды, вызванные нормальной компонентой **E** не создают тангенциально направленного поля.

4.6. Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков.

В общем случае, когда диэлектрик граничит не с вакуумом, а с другим диэлектриком имеем граничные условия общего вида для электрического поля (см. также рис. 4.7). Это совокупность уравнений, связывающих нормальные и тангенциальные компоненты векторов электрических

$$D_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} = D_{2n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}, \quad (4.15)$$

$$E_{1\tau} = \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = E_{2\tau} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} \qquad (4.16)$$

напряженности и индукции по обе стороны от поверхности раздела сред:

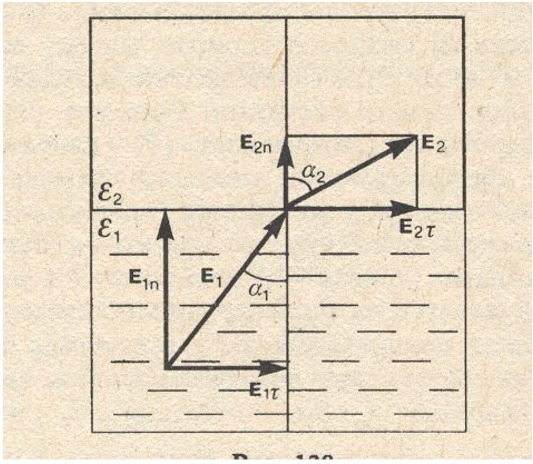


Рис. 4.7. Изменение наклона вектора напряженности **E** при переходе точки наблюдения через границу раздела двух диэлектриков.

Из уравнений (4.15, 4.16) следует закон “преломления” силовых линий Е при переходе точки наблюдения через границу раздела двух диэлектрических сред (который нельзя путать с законом преломления световых лучей):

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Модуль 3, Тема 5. <u>Теорема Гаусса для вектора электрической индукции. Граничные условия на поверхностях раздела диэлектриков.</u>

Граничные условия на поверхности раздела диэлектрик-вакуум. Теорема Гаусса для электрической индукции. Граничные условия на поверхностях раздела для компонент напряженности и электрической индукции.

Обратимся вновь к рис. 4.7, где показана диэлектрическая пластина в однородном электрическом поле. При выводе соотношения (37) мы рассматривали диполи как пары точечных зарядов, что привело нас к результату о скачкообразном изменении поляризованности **P** при переходе точки наблюдения через границу диэлектрика от значения **P**, задаваемого формулой (35) (это значение обозначим P_0) до нуля. На самом деле связанные заряды в атомах и молекулах занимают конечный хотя и микроскопический объем. Поэтому изменение P от P_0 до нуля происходит в тонком поверхностном слое d. Величина d имеет порядок характерного размера молекулы, т.е. не равна нулю, что и показано на рис. 5.1. На этом рисунке ось x направлена нормально к границе раздела.

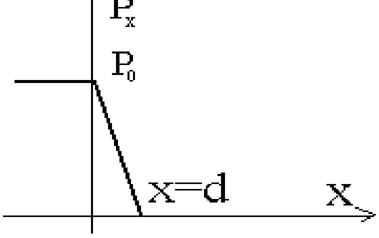


Рис. 5.1. Постепенное уменьшение поляризованности диэлектрика при переходе точки наблюдения через границу раздела.

Именно в приповерхностном слое диэлектрика толщиной *d*, который в оптике называется переходным слоем Друде, при наличии электрического поля и появляются связанные заряды (см. формулу (4.10)). Заряд на единицу площади поверхности равен $dQ = \sigma'$, а значит, объемная плотность заряда внутри этого слоя равна $\rho = \sigma'/d$. Учтем, что поляризованность в нашем примере направлена вдоль *x,* и запишем выражение для ее производной внутри поверхностного слоя, следующее из графика на рис. 4.9 и уравнения (4.10):

$$\frac{dP_x}{dx} = -\frac{P_0}{d} = -\frac{\sigma'}{d} = -\rho \qquad (5.1)$$

Уравнение (5.1), распространенное на случай произвольно искривленной поверхности среды, имеет вид $div\,\mathbf{P} = -\rho$.

Вычислим дивергенцию вектора электрической индукции, используя определение дивергенции и применяя теорему Гаусса в дифференциальной форме для вектора **E**. Получим с учетом (5.1)

$$div\,\mathbf{D} = \varepsilon_0 div\,\mathbf{E} + div\,\mathbf{P} = \varepsilon_0 \rho / \varepsilon_0 - \rho \qquad (5.2)$$

и, следовательно,

$$div\,\mathbf{D} = 0 \qquad (5.3)$$

Итак, несмотря на наличие на поверхности раздела связанных зарядов, дивергенция вектора $\mathbf{D}$ оказалась равна нулю во всем поверхностном слое. В глубине диэлектрика и в вакууме дивергенция $\mathbf{D}$ тем более равна нулю. Действительно, плотность зарядов в глубине диэлектрика, и тем более в вакууме, равна нулю. Следовательно и дивергенция обоих слагаемых в правой части формулы (5.2) равна нулю.

В нашем примере в системе нет свободных зарядов. Если они есть, и их объемная плотность обозначена через ρ', то вместо (5.3) получается

$$div\,\mathbf{D} = \rho' \qquad (5.4)$$

Уравнение (5.4) – математическая формулировка теоремы Гаусса в дифференциальной форме. Оно оказывается справедливым во всех точках наблюдения, в том числе и на границе разных диэлектриков и на границе диэлектрика с проводником. Из теоремы Остроградского-Гаусса и формулы (5.4) следует теорема Гаусса для вектора $\mathbf{D}$ в интегральной форме:

$$\oint_S D_n dS = Q' \qquad (5.5)$$

Удобство использования вектора $\mathbf{D}$ для описания электрического поля в присутствии диэлектрика заключается именно в том, что важнейшая для электродинамики теорема Гаусса для этого вектора не содержит связанных зарядов в правой части уравнений (5.4) и (5.5). Поток вектора $\mathbf{D}$ через любую замкнутую поверхность даже если эта поверхность пересекает границу раздела сред равен полному *свободному* заряду внутри поверхности и тождественно равен нулю в отсутствие свободных зарядов внутри нее.

Модуль 3, Тема 6. <u>Электроемкость уединенного проводника и системы проводников.</u>

Пусть на поверхность проводящего тела каким-то образом попадает избыточный заряд Q. За время, которое, как уже было сказано меньше 1 микросекунды, этот заряд быстро распределяется по поверхности S с равномерной поверхностной плотностью $\sigma=Q/S$. Равномерная поверхностная плотность очевидно соответствует установившемуся режиму, так как если на единичной площадке слева от данной площадки находится такой же заряд, как и на единичной площадке справа, то сила, действующая со стороны этих двух соседних площадок на заряд самой данной площадки будет равна нулю. Как и в случае поляризации проводящего тела во внешнем поле, поле, созданное избыточным зарядом в установившемся режиме будет равно нулю внутри проводника. Снаружи это поле будет отлично от нуля. Граничное условие на поверхности проводника в форме уравнения (4.5) или уравнения (4.6) при этом остается в силе, так как остаются в силе наши рассуждения, которые привели к этому условию. Потенциал на поверхности проводника φ (часто говорят просто потенциал проводника), очевидно, должен быть прямо пропорционален заряду Q . Коэффициент пропорциональности между Q и φ зависит от геометрии проводника и наличия или отсутствия поблизости других проводников. Он называется *электрической емкостью уединенного проводника (*обозначается C*).* Таким образом, по определению $C=Q/\varphi$.

Если к заряженному проводнику приближать другие проводящие тела, то на них возникнут индуцированные заряды, причем на ближайшей к данному заряженному проводнику стороне будут заряды противоположного знака. Это приведет к уменьшению потенциала данного проводника и, следовательно, к увеличению его емкости. Максимальной емкости можно достичь, если проводники находятся весьма близко и имеют узкий зазор между поверхностями, на которых будут в этом случае сосредоточены заряды противоположного знака. Система из двух проводящих тела, имеющих достаточно большие обращенные друг к другу поверхности, разделенные узким зазором, называется *конденсатором* (а эти два проводящих тела называются его *обкладками*). Поле, созданное зарядами Q и -Q на обкладках конденсатора сосредоточено (сконденсировано) в промежутке между обкладками, потому что сами эти заряды находятся на внутренних поверхностях обкладок Обычно обе обкладки конденсатора заряжают от одного источника напряжения, для чего обкладки соединяют с разноименными полюсами источника. В итоге, на обкладках оказываются заряды, одинаковые по модулю (*Q*) и противоположные по знаку. *Емкостью конденсатора с потенциалами обкладок* φ_1, φ_2 *называется отношение* заряда к разности потенциалов обкладок (напомним, что каждая обкладка обладает однородным потенциалом, ибо поверхность проводника является эквипотенциальной):

$$C = Q/|(\varphi_1 - \varphi_2)| \quad (6.1).$$

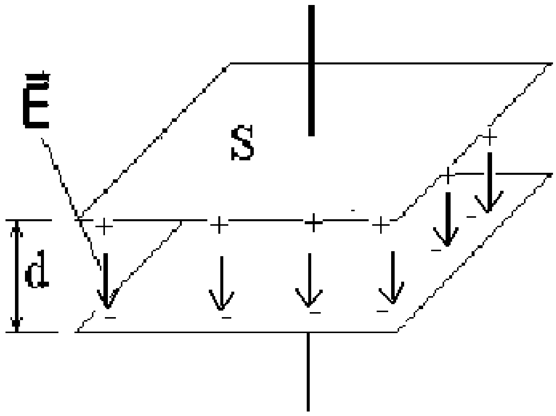


Рис.6.1. Плоский конденсатор (подводящие провода показаны вертикальными линиями).

В технике обычно используются плоские, реже цилиндрические или сферические конденсаторы. Разность потенциалов обкладок $(\varphi_1 - \varphi_2)$ называется *напряжением между обкладками* (обозначается *U или V*). Внутри плоского конденсатора напряженность поля *E* можно считать однородной (не зависящей от координат). Поэтому, очевидно, что

$$|U| = Ed \qquad (6.2)$$

где *d* – расстояние между обкладками. Напряженность поля внутри плоского конденсатора, выраженная через поверхностную плотность заряда на его обкладке, равна:

$$E = \sigma / \varepsilon\varepsilon_0 \qquad (6.3)$$

Формула для емкости плоского конденсатора следует из ее определения, очевидного соотношения $Q=\sigma S$ и формул (6.1-6.3) (см. также рис. 6.1):

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V}{d^2}$$

Здесь $V=Sd$ – объем конденсатора. Отметим, что в промышленности плоские конденсаторы обычно сворачивают в трубочку для экономии места. Из-за этого конденсатор выглядит как цилиндрическая деталь, не будучи цилиндрическим конденсатором. Емкость от этой процедуры меняется незначительно.

Емкость уединенного проводящего тела можно рассматривать как емкость такого конденсатора, одна из обкладок которого удалена на бесконечность.

Модуль 3, Тема 7. <u>Энергия системы зарядов и энергия электрического поля.</u>

Найдем потенциальную энергию двух неподвижных точечных зарядов Q_1, Q_2 , находящихся на расстоянии *r* друг от друга. Каждый из этих зарядов находится в поле другого и обладает потенциальной энергией с, где $\varphi_{12}, \varphi_{21}$ - потенциалы, создаваемые, соответственно, зарядом 2 в месте расположения заряда 1 и зарядом 1 в месте расположения заряда 2. Эти потенциалы, соответственно, равны

$$\varphi_{12} = \frac{k_e Q_2}{r} \qquad \varphi_{21} = \frac{k_e Q_1}{r}$$

По определению потенциальной энергии материальной точки величины W_1, W_2 равны работе, которую надо совершить, чтобы удалить заряд 1 из поля заряда 2 и, соответственно, заряд 2 из поля заряда 1. Легко видеть, что

$$W_1 = W_2 = \frac{k_e Q_1 Q_2}{r}$$

Эту формулу, обозначив выражение в ее правой части через *W* можно переписать в виде

$$W = \frac{k_e (Q_1 \varphi_{12} + Q_2 \varphi_{21})}{2} \quad (7.1)$$

Потенциальная энергия системы из двух зарядов, иначе говоря, энергия взаимодействия зарядов как материальных точек (по определению энергии системы материальных точек, известному из курса механики) равна работе, которую надо совершить над системой, чтобы развести эти заряды на бесконечное расстояние друг от друга. Таким образом, *W* это не что иное как энергия взаимодействия зарядов. Формула (7.1) очевидным образом обобщается на случай системы произвольного числа зарядов. Добавляя к системе из двух заряженных частиц последовательно 1, 2 и т.д. зарядов, и повторяя те же выкладки, нетрудно установить, что энергия взаимодействия системе *N* точечных зарядов равна

$$W = \sum_{i=1}^{N} Q_i \varphi_i \,/\, 2$$

где φ_i - потенциалы в месте расположения *i*-го заряда, созданные всеми остальными зарядами.

Теперь рассмотрим уединенный проводник, заряд, емкость и потенциал которого равны, соответственно, Q, C и φ. Увеличим заряд проводника на dQ, для чего надо затратить работу $dA = \varphi\, dQ = C\varphi\, d\varphi$. Следовательно, чтобы зарядить проводящее тело до потенциала φ, надо совершить работу

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = C\varphi^2 / 2$$

Так как электростатическое поле потенциально, ровно такую же работу над зарядами совершит заряженное тело при его разрядке до нулевого потенциала. Это и есть по определению *потенциальная энергия заряженного проводящего тела*. То есть

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}$$

Аналогично, *энергия конденсатора* с разностью потенциалов (напряжением между обкладками) U и абсолютной величиной заряда обкладок Q равна

$$W = CU^2 / 2 = QU / 2 = Q^2 / 2C$$

Эту же формулу, выразив емкость через площадь пластин, расстояние между ними и диэлектрическую проницаемость среды между пластинами, а напряжение - через напряженность поля, можно переписать в виде

$$W = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 Sd / 2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V$$

где V – объем диэлектрика между пластинами. Следовательно, на единицу объема диэлектрика внутри конденсатора приходится энергия

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} \quad (7.2)$$

Энергия, приходящаяся на единицу объема в электростатическом поле, называется *плотностью энергии электростатического поля.* Более тщательный анализ показывает, что эта величина равна работе по поляризации диэлектрика, которую производят в единице объема диэлектрика источники электростатического поля, при условии, что напряженность установившегося в диэлектрике поля численно равна E. Носителем энергии зарядовых систем, вообще говоря, является электромагнитное поле, а не сами заряды, хотя из формул электростатики может создаться обратное впечатление. Дело в том, что в рамках электростатики невозможно существование поля на большом расстоянии от зарядов: электростатическое поле, в отличие от волнового электромагнитного поля, жестко привязано к зарядам, и в формулах электростатики разделить то, что относится к зарядам от того, что относится к полю, невозможно. Однако это возможно в рамках элекродинамики, которая изучает волновые электромагнитные поля. Такие поля могут отрываться от зарядов и переноситься на произвольные расстояния. Эти поля называются свободными, их можно улавливать и помещать в электромагнитные резонаторы, в которых электромагнитное поле может существовать продолжительное время (если бы в резонаторах не было потерь из-за конечной проводимости стенок, то свободное поле могло бы колебаться в этих резонаторах сколь угодно долго). Когда электромагнитное поле отрывается от колеблющихся зарядов, энергия зарядовой системы уменьшается на величину энергии свободного поля. Этот процесс называется радиационным затуханием, он приводит к постепенной остановке колебаний зарядов. Радиационное затухание и энергия свободного поля, которую можно измерить, и для которой также оказывается справедлива формула (7.2), служат доказательством того, что именно поле является носителем электромагнитной энергии.

Модуль 3. Тема 8. Электрический ток. Основные понятия и определения.

Плотность и сила тока. Однородный и стационарный токи. Механизм проводимости и закон Ома в дифференциальной форме. Закон Ома в интегральной форме для однородного участка цепи. Единицы измерения. Соединения проводников. Формулы для эквивалентного сопротивления при параллельном и последовательном соединении.

8.1. Электрический ток

Электрическим током называется упорядоченное (т.е. направленное) движение носителей заряда. При таком движении за конечное время через некоторую площадку переносится отличный от нуля электрический заряд. Движение нейтральных тел (хоть они и содержат огромное число положительных и отрицательных зарядов) не имеет отношения к току. Тепловое движение зарядов также нельзя назвать током.

Движение заряженных тел или пучков заряженных частиц в пространстве называется *конвекционным током*. Конвекционные токи пучков частиц (например, электронов) обычно имеют место в разреженной среде, близкой к вакууму. Поэтому конвекционные токи в электровакуумных приборах (например, радиолампах) часто выделяют в особый разряд *вакуумных* токов. Ток возможен не только в разреженных средах, но и в некоторых сплошных средах: металлах, электролитах (жидкостях, содержащих положительные и отрицательные ионы, а иногда и свободные электроны), пористых средах, насыщенных электролитами, например в почве, а также в полупроводниках. Ток в таких средах называется *током* *проводимости*, а металлы и электролиты именно потому и называются проводниками, что они хорошо проводят электрический ток. Чтобы поддерживать токи проводимости длительное время, необходимо, чтобы источник электрического поля, находился внутри самой среды. Иначе, как следует из *граничных условий для проводящих тел* (см. Модуль 3, Тема 5), установившееся электрическое поле внутри проводника будет равно нулю, и поддержание тока невозможно. Если через проводник течет ток, это не значит, что проводник заряжен. Так, например, в металле электроны проводимости движутся под действием электрического поля в пространстве между ионами кристаллической решетки, причем концентрация электронов проводимости равна концентрации ионов.

8.2. Сила (величина) тока и плотность тока

Выделим мысленно площадку ΔS, поперечную относительно вектора скорости зарядов **u**, см. рис.8.1. Движущиеся частицы, имеющие заряд определенного знака, называются *носителями тока*. Отношение заряда ΔQ, который за время Δt переносится через площадку ΔS, к этому промежутку времени (или, иначе, заряд, переносимый через площадку ΔS в единицу времени) называется *силой или величиной тока через площадку* ΔS (иногда говорят просто «ток через площадку ΔS»). Слово “сила” здесь не означает никакой механической силы, “сила тока” это просто архаический термин. Сила тока обозначается буквой I, $I=\Delta Q/\Delta t$.

Предположим для простоты, что все носители тока (например, электроны в металле) движутся с одинаковой скоростью **u**. Концентрацию носителей обозначим через n. Заряд носителей обозначим q (например, для электронов $q=e$). Из рисунка видно, что все носители тока из объема $V=\Delta S\ u\ \Delta t$, т.е. $n\ \Delta S\ u\,\Delta t$ частиц пройдут за время Δt через правую площадку ΔS. Получим для силы тока соотношение

$$I = nqu\,\Delta S \qquad (8.1)$$

Введем векторную величину, модуль которой равен величине тока через единичную площадку, перпендикулярную скорости зарядов, а направление совпадает с направлением их скорости **u**. Определенная таким образом величина называется *плотностью тока* и обозначается **j**. Из соотношения (8.1) следует

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{u} \qquad (8.2)$$

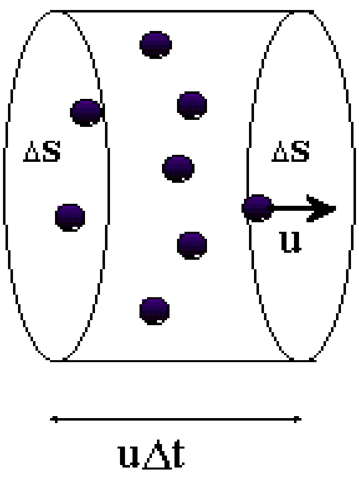


Рис.8.1 Иллюстрация к понятию силы тока.

Для случая, когда существует разброс носителей тока по скоростям (а более или менее существенный разброс имеет место всегда) под **u** следует понимать *среднюю* скорость направленного движения носителей тока. В случае переменного тока (см. ниже) определение $I=\Delta Q/\Delta t$ относится к *среднему току за время* Δt. *Мгновенная величина силы тока* определяется как *предел среднего тока при* $\Delta t \to 0$, т.е. как $I=dQ/dt$.

8.3. Однородный и неоднородный, постоянный и переменный токи

Рассмотрим ток в направлении некоторого вытянутого тела (например, проводника, с вообще говоря, переменным сечением, вытянутого вдоль оси x). Если ток через каждое поперечное сечение этого проводника один и тот же, такой ток называется *однородным*. При этом за время dt через любое поперечное сечение проводника переносится один и тот же заряд dQ, $I=dQ/dt$. Это значит, что заряд любого участка проводника равен нулю: сколько избыточного заряда поступает в данный объем с одной стороны, столько же выходит с другой. Плотность однородного тока, очевидно, зависит от площади сечения проводника: ее величина распределена вдоль проводника (вдоль оси x) по закону $J(x)=I/S(x)$.

Если ток (сила тока) через любое сечение проводника не меняется со временем, ток называется *постоянным*. Если же ток меняется во времени, то он называется *переменным*. Однородный ток может быть как постоянным, так и переменным. В последнем случае изменения тока в каждом сечении проводника должны происходить синхронно и одинаково. На самом деле, переменный однородный ток есть физическая идеализация, оправданная, если изменения тока во времени происходят медленно, а длина проводника не слишком велика.

Переменный ток во многих практических случаях меняется во времени по закону $\sin\omega t$ или близкому к нему. Если параметр ω, называемый частотой, не слишком велик, то, как правило, ток можно считать однородным, т.е. синхронно и синфазно меняющимся вдоль проводящей цепи. Переменный ток является примером *колебательного процесса*. Такие процессы будут подробно рассмотрены ниже (Модуль4).

4.4. Механизм проводимости и закон Ома в дифференциальной форме

Модельное (упрощенное) объяснение проводимости в металлах основано на представлении об идеальном *электронном газе*, в котором электроны проводимости, заполняющие пространство между ионами кристаллической решетки, находятся в состоянии непрерывного теплового движения. Если внутри металла имеется электрическое поле **E**, то на это хаотическое движение “накладывается” т.н. “дрейф”, т.е. медленное по сравнению с тепловым движением перемещение электронов в сторону действия электростатической силы $e\mathbf{E}$. В результате неупругого столкновения с ионом кристаллической решетки каждый i-й электрон приобретает случайный импульс $\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_i$, а за время свободного пробега τ (между двумя столкновениями с ионами) набирает дополнительно импульс $e\mathbf{E}\tau$. Следовательно средний за время τ импульс i-го электрона равен $\mathbf{p}_{i\,cp} = m\mathbf{v}_i + e\mathbf{E}\tau/2$. Усредним импульс электронов по всем N электронам проводника. Так как тепловое движение хаотично, иными словами, все направления $\mathbf{p}_i$ равновероятны, то для случайных скоростей всех электронов имеет место соотношение

$$\sum_i^N \mathbf{v}_i \approx 0$$

Таким образом средняя за время свободного пробега и усредненная по всему проводнику скорость электронов проводимости, которая называется скоростью дрейфа, оказывается равной

$$\mathbf{u} = e\frac{\mathbf{E}\tau}{2m} \tag{8.3}$$

Этот же результат сохраняется если усреднять скорости электронов за промежутки, большие, чем время свободного пробега.

Подставляя формулу (8.3) в соотношение (8.2), получим для плотности тока выражение

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u} = \frac{ne^2\tau}{2m}\mathbf{E} \tag{8.4}$$

Обозначив коэффициент перед напряженностью поля через σ, имеем *закон Ома в дифференциальной форме:*

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

Коэффициент σ называется *удельной проводимостью* и измеряется в сименсах, деленных на метр *Сим/м* (немецкий инженер Э.В. Сименс установил связь между этим коэффициентом и электрическим сопротивлением участка цепи, которое будет определено ниже). Закон Ома в дифференциальной форме можно выразить такими словами: плотность тока в проводнике прямо пропорциональна напряженности электрического поля внутри него. Величина коэффициента пропорциональности σ определяется только свойствами проводящей среды Следует отметить, что вышеизложенная классическая модель дает лишь грубо приближенное выражение для σ (хотя и качественно правильное).

Отметим, что «дифференциальная форма», а именно градиент, появляется в законе Ома (8.4), если выразить напряженность электрического поля через потенциал φ, меняющийся вдоль оси проводника:

$$\mathbf{j} = -\sigma grad\varphi$$

8.5. Закон Ома в интегральной форме для однородного участка цепи

Если вдоль проводника с одинаковым поперечным сечением *S* течет однородный ток *I=jS*, *I=const(x)*, то из (1.4) следует, что ось проводника совпадает с силовой линией электрического поля, причем напряженность электрического поля внутри проводника однородна. А значит, в соотношении между потенциалом и напряженностью (см. Модуль 3, Тема 3):

$$\varphi = -\int E_l dl$$

интегрирование ведется вдоль оси проводника. Подынтегральная функция в этом интеграле постоянна на контуре интегрирования. Поэтому для разности потенциалов в точках *x=L* и *x=0* можно написать:

$$\varphi(L) - \varphi(0) = -E L$$

Здесь φ(L) – потенциал при *x=L*, φ(0) – потенциал при *x=0.* Следовательно Здесь через *U* обозначена разность потенциалов *U*=φ(0) - φ (L), называемая

$$U = j\frac{L}{\sigma} = IR \tag{8.5}$$

(см. также *Электрическая емкость)* еще *напряжением* или, точнее, *падением напряжения*. Величина *R*, равная, очевидно, *L/Sσ,* называется *электрическим сопротивлением* участка L, величина 1/σ – *удельным сопротивлением* проводника. Сопротивление *R* измеряется в Омах (*Ом)*. Можно (и нетрудно) показать, что ом обратен сименсу: 1 Ом=1/Сим. Формула (1.5) обычно записывается в виде

$$I = U/R \tag{8.6}$$

Соотношение (8.6) и является математической формулировкой закона Ома в интегральной форме для однородного участка цепи L. Словесная формулировка закона такова: сила тока в цепи пропорциональна напряжению на участке цепи и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка. Исторически, закон Ома в форме (8.6) был установлен экспериментально (немецкий физик Г. Ом, 1826). Рассуждения, приведшие нас к (8.4), были проделаны (также Г. Омом) позже (1827 г.).

8.6. Сопротивления последовательного и параллельного соединения проводников.

При последовательном соединении двух проводников, показанном на рис.8.2 (а), разность потенциалов между верхним концом участка с сопротивлением R_1 и нижним концом участка R_2 равна

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_0 - \varphi_2)$$

где φ_0 - потенциал средней точки цепи. Разность $(\varphi_1 - \varphi_0)$ есть напряжение на участке R_1 . Разность $(\varphi_0 - \varphi_2)$ есть напряжение на участке R_2 . Поэтому один и тот же ток *I*, текущий через эти участки связан с *U* следующим образом:

$$U = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \qquad (8.7)$$

Таким образом, сопротивление последовательной цепи оказалось равным сумме сопротивлений участков. Это же правило остается в силе и для произвольного числа N последовательно соединенных проводников:

$$R = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

При параллельном соединении двух проводников, показанном на рис.8.2 (б), разность потенциалов между верхним концом цепи и нижним концом участка может быть рассчитана как произведение тока через участок с сопротивлением R_1 на это сопротивление или как произведение тока через участок с сопротивлением R_2 на R_2

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = I_1 R_1 = I_2 R_1$$

С другой стороны сумма токов через эти участки равна току, втекающему через верхний конец цепи и вытекающему через ее нижний конец. Это следует из закона сохранения заряда: весь заряд, который за единицу времени входит в цепь, распределяется между двумя участками R_1 и R_2 , а затем выходит из цепи также за единичное время. Иначе заряд накапливался бы в проводниках, для чего нет физических причин. Поэтому

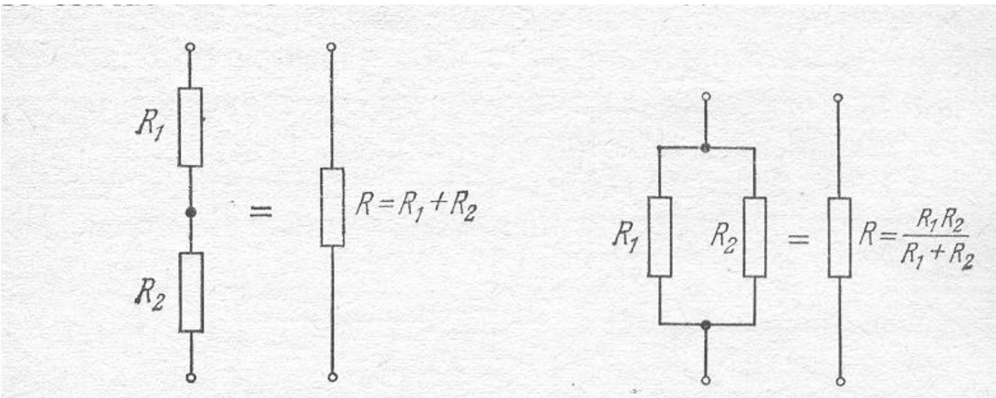
$$I = \frac{U}{R} = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$

Отсюда следует формула

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_{12}}$$

или (произвольного числа N проводников) правило параллельного соединения:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i} \qquad (8.8)$$



(а) (б)

Рис.8.2. а) – Последовательное соединение и б) – параллельное соединение проводников.

Модуль3. Тема 9. <u>Сторонние силы. Электродвижущая сила. Работа и мощность тока.</u>

Сторонние силы и электродвижущая сила. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной и интегральной формах. Закон Ома для неоднородного участка цепи и для замкнутой цепи

9.1. Сторонние силы и электродвижущая сила.

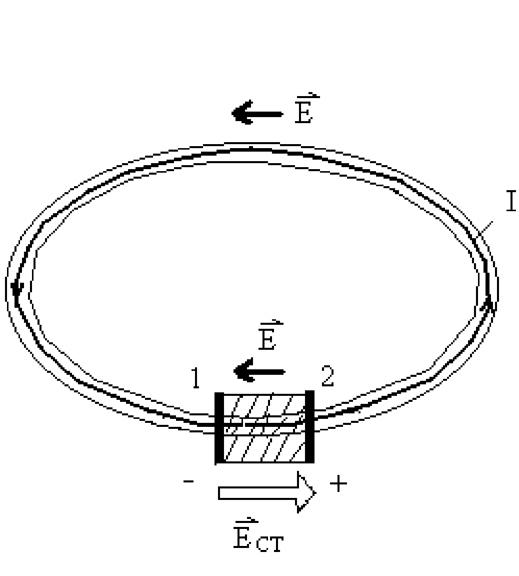


Рис.9.1. Иллюстрация к понятию электродвижущей силы и к выводу закона Ома для неоднородной цепи.

Для создания внутри проводника постоянно существующего электрического поля необходимо, чтобы в проводящей цепи существовал *источник тока (*иначе - *источник напряжения)*, т.е. устройство, внутри которого некие силы (возникающие, например, за счет энергии химических реакций, энергии вращения ротора электрогенератора и т.д.), осуществляли бы пространственное разделение разноименных зарядов, и, таким образом, совершали работу против электростатических сил, стремящихся соединить эти заряды. Проводящий элемент источника, на котором оказываются положительные заряды, называется положительным *электродом* (или положительным полюсом) источника, а элемент, на котором оказываются отрицательные заряды называется отрицательным электродом (полюсом).

Если электроды источника тока соединены проводником или системой, соединенных между собой проводников, в образовавшейся таким образом замкнутой цеп*и* протекает ток. При протекании постоянного тока через замкнутую цепь как источник, так и вся цепь вне источника электрически нейтральны, т.е. не заряжены. Заряжены только электроды источника. Для того чтобы поддерживать заряды на электродах, необходимо какие-то силы не электростатической природы, которые скомпенсировали бы силы притяжения зарядов, находящихся на электродах. Такие не-электростатические силы, поддерживающие за счет разделения зарядов электрическое поле и, следовательно, ток в цепи, называются *сторонними силами*. Они могут возникать в результате, например химических реакций. Работа сторонних сил A_{CT} по перемещению единичного заряда по замкнутой цепи называется электродвижущей силой (ЭДС) и обозначается буквой $\mathcal{E}$. Математически, работа сторонних сил как и любая механическая работа может быть записана как интеграл от скалярного произведения сторонней силы на элементарное перемещение вдоль цепи тока. Так как цепь тока замкнута, ЭДС записывается через интеграл по замкнутому контуру, т.е. является циркуляцией (см выше) сторонних сил:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{CT}}{q} = \frac{1}{q}\oint(\mathbf{F}_{CT}, d\mathbf{l}) \tag{9.1}$$

Так как сторонние силы ($\mathbf{F}_{CT}$) действуют только внутри источника ЭДС между его электродами (положение электродов в цепи на рис. 2.1 мы обозначим цифрами 1 и 2), то ЭДС являтся характеристикой источника и не зависит от внешней цепи. Введя обозначение $\mathbf{E}_{CT} = \mathbf{F}_{CT} / q$ (эта векторная величина называется *напряженностью поля сторонних сил*), формулу, определяющую ЭДС, можно записать в виде:

$$\mathcal{E} = \int_1^2 (\mathbf{E}_{CT}, d\mathbf{l})$$

9.2. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной и интегральной формах.

В процессе движения заряда q (например, электрона, причем $q=e$) по проводнику, заряд испытывает (см. *Механизм проводимости*) как упругие столкновения (с другими электронами), так и неупругие столкновения (с ионами). Значение его средней (за достаточный промежуток времени Δt, включающий несколько столкновений с ионами) скорости дрейфа u остается, как мы увидели, неизменной, а значит вся дополнительная кинетическая энергия ΔW, получаемая зарядом от поля в течение некоторого времени Δt, за это же время полностью переходит в теплоту. Согласно известному из курса механики определению кинетической энергии, величина ΔW равна работе, совершаемой электрической силой F за время Δt. Эта работа равна произведению силы на перемещение: $F u \Delta t$, а значит $\Delta W = F u \Delta t = qE u \Delta t$. Это и есть количество теплоты Q, передаваемое одним носителем тока проводящей среде за время Δt.

Пусть число носителей тока в единичном объеме проводника (концентрация) равно n. Тогда работа тока, совершенная в единичном объеме проводника за время Δt (равная количеству тепла, выделяющемуся в этом объеме за время Δt), равна $A = nQ = q\, n\, u\, E\, \Delta t = j\, E\, \Delta t$. Мощность тока на единицу объема проводника (иначе - удельная мощность), следовательно, равна jE. Обычно эту формулу записывают в виде

$$P_{уд} = \sigma E^2$$

Эта формула выражает *закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме* . Такое название связано с тем, что удельная мощность означает отношение мощности dP выделяемой током в виде тепла в малом объеме dV, к этому объему и математически может быть истолковано как производная мощности по объему. Умножая удельную мощность на объем участка проводника с сечением S и длиной L, получим для мощности тока на этом участке проводника соотношение $P = P_{уд}SL = IEL = IU$. Подставляя в него закон Ома в форме (8.5), получаем

$$P = I^2 R \qquad (9.2)$$

Формула (9.2) выражает *закон Джоуля-Ленца в интегральной форме*. В такой форме он был установлен английским физиком Д. Джоулем в 1841 г. и в 1842 г. российским физиком Э.Х. Ленцем независимо от Джоуля, работа которого стала известна за пределами Англии позже. (В XIX веке языком научного общения были немецкий и французский языки. До перевода на один их них работы, опубликованные на других языках, были мало известны). Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме оказывается справедлив и для мощности тока внутри источника, если под R в уравнении (9.2) подразумевать сопротивление источника

9.3. Закон Ома для неоднородного участка цепи и закон Ома для замкнутой цепи.

Рассмотрим еще раз цепь, показанную на рис.9.1, участок которой, ограниченный точками 1 и 2, содержит источник тока (вертикальными штрихами показаны его электроды). Такой участок называется *неоднородным*. Пусть сопротивление внешней цепи (участок между точками 1 и 2 “сверху” от источника) равно R, а сопротивление неоднородного участка равно r. Свободный заряд, который переносится по неоднородному участку 1-2 (через источник) за время Δt , равен $\Delta Q=I\Delta t$, а работа по его перемещению равна алгебраической сумме работ электростатического поля (заряд, умноженный на разность потенциалов) и поля сторонних сил A_{CT} , т.е. (см. также формулу (2.1))

$$A_{12} = \Delta Q(\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}) \tag{9.3}$$

Согласно закону Джоуля-Ленца, эта работа равна также

$$A_{12} = I^2 r \Delta t \tag{9.4}$$

Приравнивая (9.3) и (9.4), получаем математическую формулировку *закона Ома для неоднородного участка цепи*) в виде соотношения:

$$I = \frac{\mathcal{E} + \varphi_1 - \varphi_2}{r} \tag{9.5}$$

Величина в числителе выражения (9.5) называется *напряжением на неоднородном участке цепи.* Как и разность потенциалов она обозначается буквой U: $U = \varepsilon + \varphi_1 - \varphi_2$. Определив, таким образом, напряжение, мы можем записать закон Ома для неоднородного участка цепи в форме, аналогичной формуле (8.5). Отметим, что в качестве направления тока выбирается направление, в котором (по цепи с заданной ЭДС) двигались бы свободные положительные заряды. В металлах электроны проводимости, будучи отрицательными зарядами, движутся против этого условного направления тока. Это не меняет ни полученных формул, ни рассуждений, которыми мы пользовались при их выводе.

Теперь применим ко внешней цепи (проводникам, находящимся “сверху” от точек 1 и 2 на рис.9.1) закон Ома для однородного проводника, учитывая, что ток в этой цепи течет от точки 2 к точке 1, и падение напряжения вдоль внешней цепи равно $\varphi_2 - \varphi_1$. Имеем $\varphi_2 - \varphi_1 = IR$. Подставляя эту формулу в закон Ома для неоднородного участка цепи (9.5) и разрешая полученное уравнение относительно *I*, имеем *закон Ома для замкнутой цепи*:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R} \tag{9.6}$$

Сопротивление *r* представляет собой внутреннее сопротивление источника, а *R* – сопротивление всей остальной (внешней) цепи.

Рекомендуемая литература:

1. И.В. Савельев. Курс общей физики, т.2. М., Высш. школа, 1968, сс. 9-38 (в издании 1988, сс. 10-97).
2. Т.И. Трофимова. Курс физики. М. Высш. школа, 1990, сс. 128-163.

Вопросы для самоподготовки

1. Выведите формулу для напряженности электростатического поля двух точечных зарядов, одинаковых по величине и противоположных по знаку для точки наблюдения, находящейся а) посредине между зарядами, б) на расстоянии, весьма большом по сравнению с расстоянием между зарядами.

2. Поясните сущность принципа суперпозиции для поля, созданного системой N зарядов.

3. Почему в большинстве случаев поле заряженных тел рассчитывают с помощью представления о пространственно распределенном заряде, а не применяют принцип суперпозиции непосредственно к точечным зарядам, создающим поле (электронам и протонам в заряженном теле), ведь тогда при вычислении поля вместо интегрирования можно было бы ограничиться обычным суммированием?

4. Докажите, что элементарный поток электростатического поля через площадку dS равен его потоку через проекцию этой площадки, перпендикулярную вектору напряженности. Докажите, что поэтому поток поля точечного заряда через любую замкнутую поверхность, окружающую этот заряд равен потоку через любую концентричную ему сферу.

5. Силовая линия, на которой находится пробный заряд показывает направление его ускорения. Откуда это следует?

6. Почему циркуляция электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю?

7. Докажите, что ротор градиента любой функции координат тождественно равен нулю.

8. Рассмотрите некоторую (необязательно замкнутую) поверхность в пространстве, перпендикулярную силовым линиям электростатического поля. Используя тот факт, что на такой поверхности касательная к ней компонента напряженности равна нулю, докажите, что такая поверхность является поверхностью одинакового потенциала $U=\text{const}$, т.е. эквипотенциальной поверхностью.

9. Вспомните, как в курсе механики выводится формула для потенциальной энергии тела в поле сил земного тяготения. Выведите этим же способом выражение для потенциала поля, созданного точечным зарядом Q.

10. Запишите через интеграл по объему общее выражение для потенциала поля, созданного объемным распределением заряда ρ , заданным в некоторой области V.

11. Используя теорему Гаусса в интегральной форме, выведите формулу для поля равномерно заряженного шара радиусом R с зарядом Q для точек наблюдения внутри шара. Выразите результат через объемную плотность заряда.

12. Используя теорему Гаусса в интегральной форме, выведите формулу для поля равномерно заряженной нити радиусом сечения R с линейным зарядом τ для точек наблюдения внутри нити. Выразите результат через объемную плотность заряда.

13. Докажите, что величина момента M, действующего на диполь в поле с напряженностью E, равен $p\ E\ sin\Theta$, где Θ – угол между векторами дипольного момента и **E**.

14. Выше показано, что в установившемся режиме (в электростатике) внутри проводника, помещенного во внешнее поле, напряженность поля равна нулю $E=0$. То же самое относится и к касательной компоненте установившегося поля на поверхности проводника. Почему?

15. Потенциал поверхности проводящего тела во всех ее точках одинаков, т.е. эта поверхность *эквипотенциальна.* Откуда это следует?

16. Объясните почему потенциал заряженного проводника прямо пропорционален заряду. Почему, к примеру, φ пропорционально не заряду в квадрате? Напишите правильную формулу

17. Почему заряды на обкладках конденсатора после окончания зарядки оказываются сосредоточенными на тех их сторонах, которые обращены друг к другу?

18. Найдите в тексте общую формулу связи напряженности и потенциала и на ее основе обоснуйте формулу $U=Ed$ для плоского конденсатора.

19. Напряженность поля внутри плоского конденсатора, выраженная через поверхностную плотность заряда на его обкладке, равна $E = \sigma/\varepsilon\varepsilon_0$. Откуда это следует?

20. Докажите теорему Гаусса (в интегральной форме) для вектора электрического смещения (индукции) для частного случая. когда поверхность, через которую вычисляется поток пересекает одну границу раздела диэлектрик-вакуум (часть поверхности находится в вакууме, а другая часть в диэлектрике), причем свободный заряд находится в вакууме. Указание. Примените теорему Гаусса в дифференциальной форме для вектора $\mathbf{D}$.

21. Поясните почему электрон, находящийся в поле напряженностью E, набирает за время свободного пробега импульс $e\mathbf{E}\tau$.

22. За счет каких столкновений (упругих или неупругих) происходит преобразование кинетической энергии потока зарядов в теплоту? Откуда следует формула для кинетической энергии заряда, приводящая к закону Джоуля-Ленца?

23. Чем отличается электродвижущая сила источника тока от разности потенциалов на его электродах? В каком случае значения этих величин оказываются равными и почему,

24. Что такое сторонние силы, Какова их природа?

25. В чем отличие понятия напряжения на неоднородном участке цепи от напряжения (на однородном участке), например от напряжение на конденсаторе?

26. Как выразить удельное сопротивление проводника через сопротивление участка цепи длиной L и сечением S?