1. Определители второго и третьего порядка.

Квадратная таблица, составленная из четырех действительных чисел (или комплексных), называется квадратной матрицей второго порядка. A = $\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21}\ a_{22} \end{pmatrix}$

Определителем 2-го порядка, соответствующим матрице A, называется число:

detA = $\begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21}\ a_{22} \end{bmatrix}$ = $a_{11}a_{22}$ - $a_{12}a_{21}$

Аналогично, если:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{pmatrix}$

- квадратная матрица 3-го порядка. Ее определитель:

detA = $\begin{bmatrix} a_{11} a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{bmatrix}$ = $a_{11}a_{22}\ a_{33}$ + $a_{21}a_{32}\ a_{13}$ + $a_{12}a_{23}\ a_{31}$ - $a_{13}a_{22}\ a_{31}$ - $a_{12}a_{21}\ a_{33}$ - $a_{11}a_{32}\ a_{23}$

Свойства определителей:

1. Определитель не изменяется при транспонировании: detA^{T}=det$A$.
2. При перестановке любых двух строк (столбцов), определитель меняет знак.
3. Если в определителе есть две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то он равен нулю.
4. Если в определителе есть две пропорциональные строки (два пропорциональные столбца), то он равен нулю.
5. Определитель не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить элементы любой другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.
6. Определитель, содержащий нулевую строку (нулевой столбец), равен нулю.
7. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) на алгебраические дополнения другой строки (другого столбца) равна нулю.
8. Определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей.
9. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме данной, прежние, а в данной строке (столбце) в первом определителе стоят первые, а во втором – вторые слагаемые.
10. Если все элементы строки (столбца) умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число.

Определители n – го порядка.

Определителем n-го порядка (определителем квадратной матрицы n-го порядка n), n>1, называется число, равное

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot M_1^{(j)},$$

где $M_1^{(j)}$ — определитель квадратной матрицы полученной из матрицы A вычеркиванием первой строки и j-го столбца.

2. Матрица размера m × n – прямоугольная таблица из чисел a_{ij}, , i = 1, 2, …, m, j = 1, 2, …, n,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix},$$

Состоящая из m строк и n столбцов.

Операции над матрицами:

1. Сумма A + B (m × n)-матриц A = (a_{ij}) и B = (b_{ij}) называется матрица C = (c_{ij}) того же порядка, каждый элемент которой равен сумме соответственных элементов матриц A и B.

2. Произведение αA матрицы A = (a_{ij}) на число α (действительное или комплексное) называется матрица B = (b_{ij}), получающаяся из матрицы A умножением всех ее элементов на α.

3. Произведение AB (m × n)-матрицы A = (a_{ij}) на (n × k)-матрицу B = (b_{ij}) называется матрица C = (c_{ij}), элемент которой c_{ij}, стоящий в i – строке и j – столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i – строки матрицы A и j – столбца матрицы B.

3.Обратная матрица:

Квадратная матрица A называется вырожденной (особенной), если ее определитель равен нулю, и невырожденной в противном случае. Если A – невырожденная матрица, то существует и притом единственная матрица A^{-1} такая, что:

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица. A^{-1} – матрица обратная матрице A.

Теорема. Если матрица обратима, то ее обратная матрица единственна, т.е. если $A \cdot X = X \cdot A = E, X = A^{-1}, A \cdot Y = Y \cdot A = E, Y = A^{-1}$ то $X \equiv Y$.

4. Ранг матрицы:

Пусть r: $\exists M_r \neq 0$Б при этом $\forall s > r$ все $M_s = 0$, значит r – ранг матрицы.

Ранг матрицы — наивысший из порядков всевозможных ненулевых миноров этой матрицы. Если все миноры равны нулю, то ранг тоже равен нулю.

Метод элементарных преобразований основан на том, что преобразования матрицы не меняют ее ранга. Используя эти преобразования, матрицу можно привести к такому виду, когда все ее элементы, кроме элементов главной диагонали равны нулю.

5. Системы n уравнений с n неизвестными. Решение с помощью метода обратной матрицы.

AX = B

$X = A^{-1} * B$

Если B = 0, то система однородная, в противном случае неоднородная.

Решение системы – всякий n – компонентный вектор X.

Система совместна, если у нее есть хотя бы одно решение, иначе – несовместна.

6. Системы n уравнений с n неизвестными. Формулы и теорема Крамера.

Правило(теорема) Крамера: если detA ≠ 0, те матрица A имеет обратную, то система имеет единственное решение:

$X = A^{-1} * B$

Или в покомпонентной записи: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, i = 1, 2, 3…n

где Δ_i – определитель, полученный из определителя Δ заменой i – го столбца на столбец свободных членов.

Док – во:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \mid * A_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \mid * A_{21} \\ a_{21}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \mid * A_{31} \end{cases}$$

$$x_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) + x_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) + x_3(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} =>$$

$$\Delta x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_2 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix} => x = \frac{\Delta_j}{\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_1 \\ \Delta x_2 = \Delta_2 \\ \Delta x_3 = \Delta_3 \end{cases}$$

Если $\Delta = 0$ и хотя бы $\Delta_1 \neq 0$, то система не совместна.

7. Элементарные преобразования систем. Ступенчатые системы. Приведение произвольной линейной системы к ступенчатому виду.

1. Перестановка двух строк.
2. Умножение строки на k, $k \neq 0$.
3. Прибавление к элементам 1 строки элементов другой строки * k, $k \neq 0$.
4. Вычеркивание 0 строки.

Ступенчатые матрицы:
 - если:
1. все 0 строки ниже ненулевых строк.
2. В каждой след. строке 1-ый ненулевой элемент расположен правее 1-го ненулевого элемента пред. строки.

Любую матрицу можно свести к ступенчатой путем элементарных преобразований.

8. Теорема о решениях ступенчатой системы:

1. Если в расширенной матрице A_p имеются (0, 0, 0…b), $b \neq 0$, то $r(A) < r(A_p)$ => система не совместна.

Док – во:

$$r(A) = r, \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{\dots} \\ a_{21} a_{22} a_{\dots} \\ a_{31} a_{32} a_{\dots} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{Для } A_p: \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{\dots} \\ a_{21} a_{22} a_{\dots} \\ a_{31} a_{32} a_{\dots} \\ 0 \quad 0 \quad b \dots \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{\dots} \\ a_{21} a_{22} a_{\dots} \\ a_{31} a_{32} a_{\dots} \end{vmatrix} \neq 0 => r(A) = r + 1$$

2. r(A) = кол – ву главных переменных.

Если число уравнений в ступенчатой матрице < числа неизвестных, то решений либо $\emptyset$, либо бесконечно много.

9. Теорема Кронекера – Капелли: для того, чтобы система была совместной необходимо и достаточно, чтобы rangA = rang$\overline{A}$, где $\overline{A}$ = (A|B) – расширенная матрица системы.

Если ранг = числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Если ранг < числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

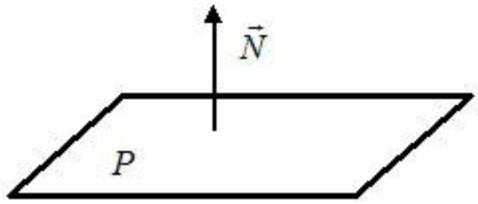
detA ≠ 0 – 1 решение.

detA = 0 – существует ненулевое решение.

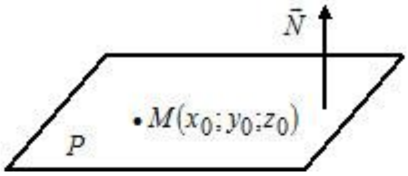
10. Уравнения плоскости в пространстве:

Существуют такие формы записи уравнения плоскости:

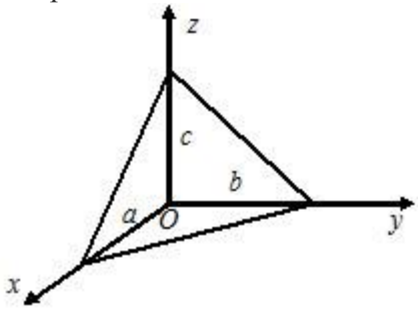
1) Ax+By+Cz+D =0− общее или каноническое уравнение плоскости P, где $\overline{N}$= (A,B,C)− нормальный вектор плоскости P.



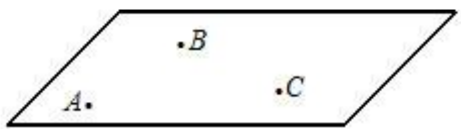
2) A(x−x0)+B(y−y0)+C(z−z0) = 0 − уравнение плоскости P, которая проходит через точку M(x0,y0,z0) перпендикулярно вектору $\overline{N}$ = (A,B,C). Вектор $\overline{N}$ называется нормальным вектором плоскости.



3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$− уравнение плоскости в отрезках на осях, где a, b и c− величины отрезков, которые плоскость отсекает на осях координат.



4) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – уравнение плоскости, которая проходит через три точки A(x1,y1,z1),B(x2,y2,z2) и C(x3,y3,z3).



5) xcosα + ycosβ + zcosγ – p = 0 – нормальное уравнение плоскости, где cosα,cosβcos и cosγ – направляющие косинусы нормального вектора $\overline{N}$ направленного из начала координат в сторону плоскости, а p>0– расстояние от начала координат до плоскости.

Общее уравнение плоскости приводится к нормальному, путем умножения на нормирующий множитель μ = $-\frac{-sqnD}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Расстояние от точки M(x0,y0,z0) до плоскости P:Ax+By+Cz+D=0
вычисляется по формуле:
d = $|\frac{\mathrm{Ax+By+Cz+D}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}|$

Условие параллельности плоскостей:
$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \,||\, \overrightarrow{n_2}$
$\overrightarrow{n_1} = (A_1B_1C_1)$

$\overrightarrow{n_2} = (A_2B_2C_2)$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Условие перпендикулярности плоскостей:
P_1 перпендикулярна $P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_1} * \overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow A_1 * A_2, B_1 * B_2, C_1 * C_2 = 0.$
Угол между плоскостями:
$\mathrm{Cos}(P_1 \wedge P_2) = \frac{|A_1 * A_2 + B_1 * B_2 + C_1 * C_2|}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}}$