



**НИУ ИТМО. Кафедра ВТ**

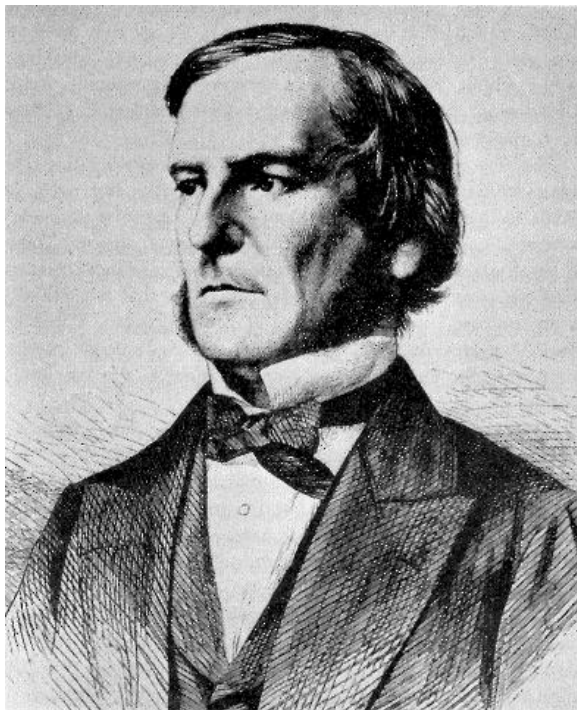
**Информатика (2016/2017)**

Балакшин П.В., Соснин В.В.

## **Лекция 8**

# **Алгебра двоичной ЛОГИКИ**

# Гуру алгебры логики



**Джордж Буль  
(1815-1864)**

**Алгебра двоичной логики —**  
раздел математики,  
изучающий логические  
операции над двоичными  
переменными.

# Основные определения

***Логическая (булева) переменная*** – такая переменная, значения которой могут быть лишь "1" или "0".

***В естественном языке:***

*«булева переменная» = «высказывание».*

***Высказывание*** – утверждение, про которое можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

***Обозначения:***

*"истина" и "ложь", "true" и "false" или "1" и "0".*

# Логическая функция

**Логическая (булева) функция**  $f(x, y, z, \dots)$ :

в результате выполнения логических операций над логическими переменными  $x, y, z, \dots$  получается значение 0 или 1.

Основные логические операции:

$\overline{x}$  – **отрицание** или *инверсия*

$x \wedge y$  – **логическое умножение** или *конъюнкция*

$x \vee y$  – **логическое сложение** или *дизъюнкция*

# Таблицы истинности (ТИ)

Существует только 4 разные логические функции одной переменной  $F(X)$ . Любая другая самая сложная функция ( $F(X) = \bar{X} \wedge X \vee X$ ) будет иметь одну из четырёх ТИ:

| $X$ | $F_1(X) = 0$ | $F_2(X) = X$ | $F_3(X) = \bar{X}$ | $F_4(X) = 1$ |
|-----|--------------|--------------|--------------------|--------------|
| 0   | 0            | 0            | 1                  | 1            |
| 1   | 0            | 1            | 0                  | 1            |

Логическая функция двух переменных:  $F(X, Y)$ . **Сколько существует разных  $F_i(X, Y)$ ?**

| $X$ | $Y$ | $F_1(X,Y) = X \vee Y$ | $F_2(X,Y) = X \wedge Y$ | $F_i(X,Y) = \dots$ |
|-----|-----|-----------------------|-------------------------|--------------------|
| 0   | 0   | 0                     | 0                       | ...                |
| 0   | 1   | 1                     | 0                       | ...                |
| 1   | 0   | 1                     | 0                       | ...                |
| 1   | 1   | 1                     | 1                       | ...                |

# Количество булевых функций

| Значения K штук булевых операндов |       |     |           |       | Значение булевых функций вида $F(A_1, A_2, \dots, A_{K-1}, A_K)$ |      |     |      |
|-----------------------------------|-------|-----|-----------|-------|------------------------------------------------------------------|------|-----|------|
| $A_1$                             | $A_2$ | ... | $A_{K-1}$ | $A_K$ | FK,0                                                             | FK,1 | ... | FK,N |
| 0                                 | 0     | ... | 0         | 0     | 0                                                                | 1    | ... | 1    |
| 0                                 | 0     | ... | 0         | 1     | 0                                                                | 0    | ... | 1    |
| 0                                 | 0     | ... | 1         | 0     | 0                                                                | 0    | ... | 1    |
| ...                               | ...   | ... | ...       | ...   | ...                                                              | ...  | ... | ...  |
| 1                                 | 1     | ... | 1         | 1     | 0                                                                | 0    | ... | 1    |

**L штук**  
 (от 000..0 до 111..1 сверху вниз)

**N штук** (от 00..0 до 11..1 слева направо)

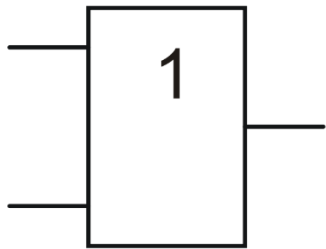
$$L = 2^K, N = 2^L \Rightarrow N = 2^{(2^K)}$$

**Пример:** количество булевых функций одной переменной равно 4, количество булевых функций двух переменных равно 16 и т.д.

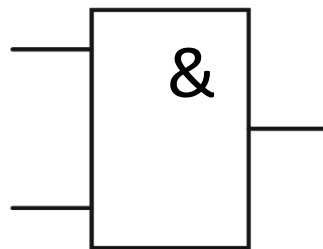
# Обобщенная таблица истинности

| X | 1 | 1 | 0 | 0 | Обозначение                                                                                                                     | Название                                                                           |
|---|---|---|---|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Y | 1 | 0 | 1 | 0 |                                                                                                                                 |                                                                                    |
| F | 0 | 0 | 0 | 1 | $F2,1 = x \downarrow y = x \text{ NOR } y = \text{NOR}(x,y) = x \text{ НЕ-ИЛИ } y = \text{НЕ-ИЛИ}(x,y)$                         | <a href="#">стрелка Пёрса</a>                                                      |
| F | 0 | 1 | 1 | 0 | $F2,6 = x \oplus y = x \text{ XOR } y = \text{XOR}(x,y) = x \text{ >< } y = x \text{ <> } y = x \text{ НЕ } y = \text{НЕ}(x,y)$ | сложение по модулю 2, исключающее «или», сумма Жегалкина <sup>[5]</sup> , не равно |
| F | 0 | 1 | 1 | 1 | $F2,7 = x \mid y = x \text{ NAND } y = \text{NAND}(x,y) = x \text{ НЕ-И } y = \text{НЕ-И}(x,y)$                                 | <a href="#">штрих Шёффера, НЕ-И, пунктир Чулкова</a>                               |
| F | 1 | 0 | 0 | 0 | $F2,8 = x \wedge y = x \cdot y = xy = x \& y = x \text{ AND } y = \text{AND}(x,y) = x \text{ И } y = \text{И}(x,y) = \min(x,y)$ | <a href="#">конъюнкция</a>                                                         |
| F | 1 | 0 | 0 | 1 | $F2,9 = (x \equiv y) = x \sim y = x \leftrightarrow y = x \text{ EQV } y = \text{EQV}(x,y)$                                     | <a href="#">эквивалентность, равенство, эквиваленция</a>                           |
| F | 1 | 0 | 1 | 1 | $F2,11 = x \rightarrow y = x \supset y = x \leq y = x \text{ LE } y = \text{LE}(x,y)$                                           | <a href="#">импликация, следование</a>                                             |
| F | 1 | 1 | 1 | 0 | $F2,14 = x \vee y = x + y = x \text{ OR } y = \text{OR}(x,y) = x \text{ ИЛИ } y = \text{ИЛИ}(x,y) = \max(x,y)$                  | <a href="#">дизъюнкция</a>                                                         |

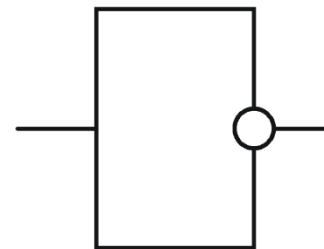
# Обозначение на электрической схеме булевых функций



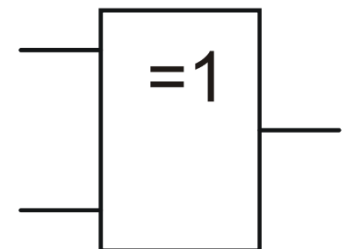
ИЛИ



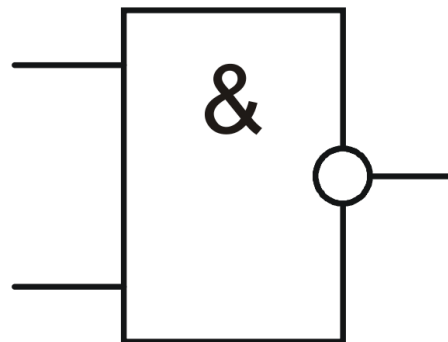
И



НЕ



XOR



Какая это функция?



# Цена логической схемы

**Цена схемы по Квайну** – суммарное количество входов во всех логических элементах.

**Минимизация функции** – сокращение цены функции, с помощью преобразования его к более простому эквивалентному выражению.

Наиболее простой вид получается при сведении функции к постоянной – 1 (*истина*) или 0 (*ложь*).

# Логический базис (ЛБ)

ЛБ – набор булевых функций, позволяющий реализовать любую другую булеву функцию. Три наиболее востребованных ЛБ:

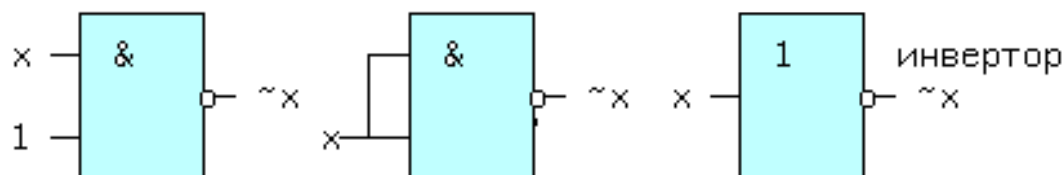
**1. И, ИЛИ, НЕ.**

**2. И-НЕ.**

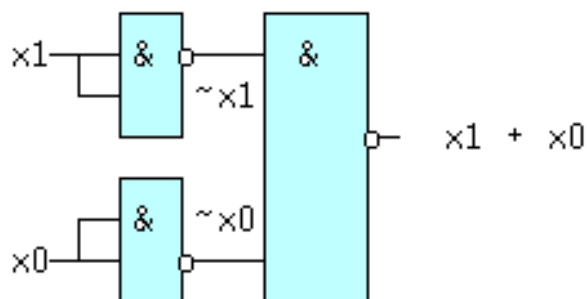
**3. ИЛИ-НЕ.**

Пример: реализация функций И, ИЛИ, НЕ в базисе И-НЕ.

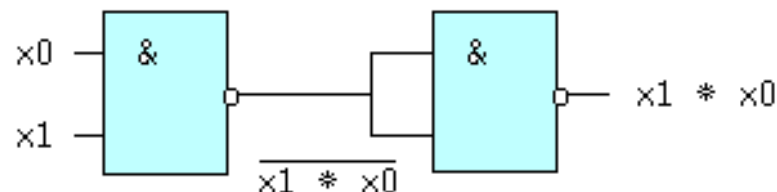
"НЕ" :  $\sim x = \sim(x * 1) = \sim(x * x)$



"ИЛИ":  $x1 + x0 = \sim(\sim x1 * \sim x0)$  см.



"И" :  $x1 * x0 = \sim(\sim(x1 * x0))$



# Основные тождества булевой алгебры

1. Аксиома двойного отрицания:

$$\overline{\overline{x}} = x$$

2. Закон коммутативности:

$$x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$$

3. Закон ассоциативности:

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

4. Закон идемпотенции:

$$x \vee x = x, x \wedge x = x$$

# Основные тождества булевой алгебры (2)

5. Закон поглощения:

$$x \wedge (x \vee y) = x, x \vee (x \wedge y) = x$$

6. Закон дистрибутивности:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

7. Законы де Моргана:

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}, \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

8. Законы нейтральности:

$$x \wedge (y \vee \bar{y}) = x, x \vee (y \wedge \bar{y}) = x$$

9. Аксиомы существования 1 и 0:

$$\bar{0} = 1, \bar{1} = 0, \bar{x} \vee x = 1, \bar{x} \wedge x = 0$$