



Информатика

Учебный год 2016/2017

Кафедра ВТ НИУ ИТМО. Соснин В.В., Балакшин П.В.

Лекция 2

Нетрадиционные системы счисления

Ещё раз о позиционных СС

$$X_{(q)} = x_{n-1}q^{n-1} + x_{n-2}q^{n-2} + \dots + x_1q^1 + x_0q^0 + x_{-1}q^{-1} + x_{-2}q^{-2} + \dots + x_{-m}q^{-m}$$

Пример: $56789,1_{10} = 5 \cdot 10000 + 6 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot 10^{-1}$

$$X_{(q)} = \sum_{i=-m}^{n-1} x_i \cdot q^i$$

m — количество цифр справа от запятой,
 n — количество цифр слева от запятой,
 x — цифра числа,
 q — вес цифры.

А что если q иррациональное,
 отрицательное,
 переменное?

Факториальная система счисления. Определение

Любое целое число можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^n d_k \cdot k!, \quad \text{где } 0 \leq d_k \leq k.$$

Тогда запись числа x в факториальной системе счисления будет иметь вид $(d_n d_{n-1} \dots d_1)_\Phi$

Примеры

- $310_\Phi = 3 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1! = 20_{10}$
- $106_{10} = w \cdot 4! + x \cdot 3! + y \cdot 2! + z \cdot 1! = \dots \text{подбор } w, x, y, z \dots =$
 $= 4 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 0 \cdot 1! = 4120_\Phi$

Факториальная система счисления. Применение

Применение — (де)кодирование перестановок.

Задача. Пусть имеется $n=5$ чисел (1,2,3,4,5) и нужно найти все их перестановки. Известно, что всего существует $n! = 5! = 120$ таких перестановок. Как найти перестановку, если задан её номер (k) ?

Решение. Найдём 21-ю перестановку ($k = 21$). Переведём k в факториальную систему: $21 = 3 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 1 \cdot 1! = 311_{\Phi}$. Дополним его до $(n-1)$ разрядов: $311_{\Phi} \rightarrow \mathbf{0311}_{\Phi}$. Расставим символы по местам:

- 1) справа от «5» есть 0 меньших цифр (_ _ _ _ 5)
- 2) справа от «4» есть 3 меньшие цифры (4 _ _ _ 5)
- 3) справа от «3» есть 1 меньшая цифра (4 _ 3 _ 5)
- 4) справа от «2» есть 1 меньшая цифра (4 2 3 _ 5)



ОТВЕТ:
4 2 3 1 5

Значение k	0	1	2	3	...	21	...	119
k -я перестановка	12345	21345	13245	23145	...	42315	...	54321

Система счисления Цекендорфа

Любое целое число можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^n d_k \cdot F_k, \quad \text{где } d_k \in \{0, 1\}, \text{ а } F_k \text{ — числа Фибоначчи.}$$

Каждое ЧФ есть сумма двух предыдущих ЧФ:

$F_k = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$, где $k = 0, 1, \dots$. Запись числа x в системе Цекендорфа будет иметь вид $(d_n d_{n-1} \dots d_1)_{\text{Ц}}$

Пример неоднозначности:

$$16_{10} = 8+5+2+1 = 13+3, \text{ т.е. } 16_{10} = 11011_{\text{Ц}} = 100100_{\text{Ц}}$$

Чтобы исключить неоднозначность, ввели запрет на использование двух соседних единиц

(т. е. $16_{10} = 100100_{\text{Ц}}$, а $11011_{\text{Ц}}$ является ошибочной записью).

Применение: минимизация необходимого числа зёрен, кодирование данных с маркером завершения «11».

Система счисления Бергмана

Любое действительное число можно представить в виде

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \cdot z^k, \quad \text{где } d_k \in \{0,1\}, \quad z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Число z — число золотой пропорции. Запись числа x в системе Бергмана будет иметь вид $(\dots d_2 d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \dots)_B$

Примеры

$$2_{10} = 10,01_B = z^1 + z^{-2}$$

$$3_{10} = 11,01_B = z^1 + z^0 + z^{-2}$$

$$3_{10} = 100,01_B = z^2 + z^{-2}$$

Чтобы исключить неоднозначность, используют запись с наибольшим количеством разрядов, т. е. $3_{10} = 100,01_B$

Применение: запись иррациональных чисел конечным числом цифр, контроль арифметических операций, коррекция ошибок, самосинхронизация кодовых последовательностей при передаче по каналу связи.

Другие системы счисления

1. Нега-позиционные (с отрицательным основанием).

Примеры в нега-десятичной системе счисления:

- $123_{-10} = 1 \cdot (-10)^2 + 2 \cdot (-10)^1 + 3 \cdot (-10)^0 = 100 - 20 + 3 = 83_{10}$
- $58_{-10} = 5 \cdot (-10)^1 + 8 \cdot (-10)^0 = -50 + 8 = -42_{10}$

Числа с чётным количеством цифр — отрицательные.

2. Симметричные (с отрицательными цифрами).

Примеры в симметричной пятеричной системе счисления, где вместо привычных цифр $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ используются $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

- $20\bar{2}10_{5C} = (2) \cdot 5^4 + (0) \cdot 5^3 + (-2) \cdot 5^2 + (1) \cdot 5^1 + (0) \cdot 5^0 = 1250 - 50 + 5 = 1205_{10}$
- $\bar{2}0\bar{2}10_{5C} = (-2) \cdot 5^4 + (0) \cdot 5^3 + (2) \cdot 5^2 + (-1) \cdot 5^1 + (0) \cdot 5^0 = -1250 + 50 - 5 = -1205_{10}$

Симметричные СС определены только для нечётных оснований!

Применение. В негапозиционных и симметричных СС не требуется специального знака для обозначения отрицательных чисел. Это позволяет использовать их для представления отрицательных чисел в компьютерах.