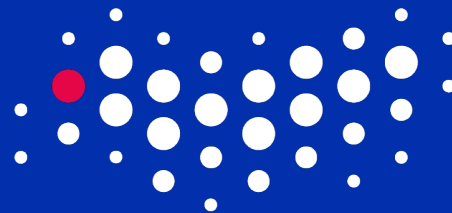


УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург, 2017



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Вычислительная математика

Исаев Илья Владимирович

ivisaev@corp.ifmo.ru

Санкт-Петербург, 2017



Программа курса:

- ✓ Лекции:
 - Погрешность вычислений;
 - Методы решения систем линейных алгебраических уравнений;
 - Численное интегрирование;
 - Интерполяция и аппроксимация;
 - Решение обыкновенных дифференциальных уравнений;
 - ???
- ✓ Лабораторные работы:
 - Решение системы линейных алгебраических уравнений:
 - Гаусса
 - Гаусса с главным элементом
 - Простых итераций
 - Гаусса-Зейделя
 - Интегрирование
 - Прямоугольников
 - Трапеций
 - Симпсона



Продолжение:

- Приближение функции
 - Лагранжа
 - Ньютона
 - Сплайны
 - МНК
 - Решение обыкновенных дифференциальных уравнений
 - Эйлера
 - Усовершенствованный Эйлера
 - Рунге-Кутта
 - Адамса
 - Милна
 - Предиктора и Корректора
- ✓ Две рубежные контрольные работы.

Лекция №1

Погрешности вычислений

Применение вычислительной математики, инженерные расчеты, научные вычисления. Основные понятия: величины, абсолютной и относительной погрешности. Источники происхождения ошибок: неопределенность входных данных, погрешность методы, погрешность округления, IEEE, OFL, UFL. Округления чисел.



Погрешность вычислений

Пусть a – истинное значение некоторой величины, a^* – ее приближенное значение.

✓ *Определение 1:*

- Абсолютная погрешность величины a^* называется наименьшим значение $\Delta(a^*)$, про которое известно, что

$$|a^* - a| \leq \Delta(a^*).$$

✓ *Определение 2:*

- Относительная погрешность величины a^* называется наименьшее значение $\delta(a^*)$, про которое известно, что

$$\left| \frac{a^* - a}{a^*} \right| \leq \delta(a^*).$$

Источники погрешностей

- ✓ Неопределенность входных данных
- ✓ Погрешность метода
- ✓ Погрешность округления



Неопределенность входных данных

✓ Пример 1:

x^* - полученное значение, $y^* \approx f(x^*)$ – значение функции.

$$x - \varepsilon \leq x^* \leq x + \varepsilon$$

$$y - \delta \leq y^* \leq y + \delta.$$

Пусть $f(x) = \sin x$.

Очевидно, что $|y^* - y| \leq |b - a|$. Это не лучшая оценка.

Можно выбрать

$$y_{\text{опт}}^* = \frac{b - a}{2}$$

Тогда

$$|y_{\text{опт}}^* - y| \leq \frac{|b - a|}{2}.$$

Однако и такой выбор оптимального значения не всегда наилучший.

Погрешность метода

- ✓ Предположим, мы хотим вычислить значение функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sin x$. Для этого разложим в ряд Тейлора:

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

- ✓ Зависит от количества членов:

$$|y_n^* - y| = \frac{y^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \text{ где } 0 < \xi < x.$$



Погрешность округления

- ✓ Стандарт IEEE (англ. Institute of Electrical and Electronics Engineers) - институт инженеров электротехники и электроники, международная некоммерческая ассоциация специалистов в области техники, мировой лидер в области разработки стандартов по радиоэлектронике, электротехнике и аппаратному обеспечению вычислительных систем и сетей.

- Одинарная точность:

Знак	Степень	Мантисса
1	8	23

$$(-1)^s 2^{e-127} (1 + f)$$

$\epsilon_{\text{маш}}$ - машинная погрешность или погрешность округления.



Одинарная точность (32 бита)

✓ *Определение 3:*

$\varepsilon_{\text{маш}}$ - наибольшая величина, для которой справедливо тождество

$$1 + \varepsilon_{\text{маш}} = 1.$$

✓ *Определение 4:*

OFL – Over Flow Limit (порог переполнения) максимальное число, которое может быть записано в арифметику.

$$OFL = 2^{256-127} (1 + 1) \approx 10^{-38}.$$

✓ *Определение 5:*

UFL – Under Flow Limit (порог машинного нуля) минимальное число, которое может быть записано в арифметику.

$$UFL = 2^{-127} \approx 10^{-38}.$$



Одинарная точность (32 бита)

- ✓ Субнормальные числа, нужны для того, чтобы правильно округлять результаты математических операций (сложение, вычитание, умножение и деление).

$+, -, *, / \rightarrow \odot$

Тогда

$\text{float}(a \odot b)$

округляет до ближайшего числа с плавающей точкой.

Если результат ровно по центру – ближайший четный с нулевым последним разрядом.



Двойная точность (64 бита)

Знак	Степень	Мантисса
1	11	52

- ✓ В этом случае число представимо в следующем виде:

$$(-1)^s 2^{e-1023} (1 + f)$$

- ✓ Получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{маш}} &= 2^{-53} \approx 10^{-16}, \\ OFL &= 2^{2048-1023} \approx 10^{308}, \\ UFL &= 2^{-1023} \approx 10^{-308}.\end{aligned}$$

- ✓ В современных больших расчетах вычисления выполняются в двойной точностью.



Двойная точность (64 бита)

✓ Пример 2:

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (a_n + x^k).$$

Для вычисления будем использовать схему Горнера.

Пусть $f(x) = (x - 2)^9 = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512$.



Двойная точность (64 бита)

✓ Пример 3:

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Для вычисления будем использовать тот факт, что начиная с некоторого номера, каждый следующий член ряда будет меньше чем ошибка округления.

✓ Результаты работы для чисел с одинарной точностью:

X	SUM	EXP	X	SUM	EXP
1	2,718282	2,718282	-1	0,3678794	0,367795
5	148,4132	148,4132	-5	$6,7377836 * 10^{-3}$	$6,7377947 * 10^{-3}$
10	22026,47	22026,46	-10	$-1,6408609 * 10^{-4}$	$4,539930 * 10^{-4}$
15	3269017	3269017	-15	$-2,2377001 * 10^{-7}$	$3,0590232 * 10^{-7}$
20	$4,8516531 * 10^8$	$4,8516531 * 10^8$	-20	$1,202966 * 10^{-9}$	$2,0611537 * 10^{-9}$

✓ Алгоритм является неустойчивым, однако его можно усовершенствовать.



- ✓ Будем вычислять для $x < 0$ значения e^{-x} , а не e^x , как раньше. Тогда e^x вычислим как

$$e^x \frac{1}{e^{-x}}.$$

Тогда алгоритм будет устойчивым.



✓ *Пример 4:*

Рассмотрим систему уравнений следующего вида

$$\begin{cases} 0,780x + 0,563y = 0,217 \\ 0,457x + 0,330y = 0,127 \end{cases}$$

Точным решением этой системы является:

$$x = 1,000 \text{ и } y = -1,000.$$

Если решать систему метод Гаусса с точностью три десятичных знака, то получим следующие результаты:

$$x = 1,71 \text{ и } y = -1,98.$$

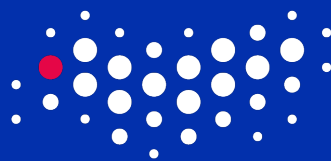
Подставим полученные значения:

$$\begin{cases} 0,780(1,71) + 0,563(-1,98) - 0,217 = 0,00206 \\ 0,457(1,71) + 0,330(-1,98) - 0,127 = 0,00167 \end{cases}$$



Список литературы

- ✓ Калиткин Н.Н. Численные методы.
- ✓ Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения.
- ✓ Турчак Л.И. Основы численных методов.
- ✓ Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.
- ✓ Денисова Э.В., Кучер А.В. Основы вычислительной математики
- ✓ Press W.H. et al. Numerical Recipes in C



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

iam.ifmo.ru

ivisaev@corp.ifmo.ru

Санкт-Петербург, 2017